林碧珍（2000）：一個以學童數學認知為基礎的小學教師數學專業發展模式。八十八學年度師範院校教育學術論文集，(pp.1-34)，國立台北師範學院

一個以學童數學認知為基礎的小學教師數學專業發展模式

林碧珍

國立新竹師範學院數理教育系

摘　要

本研究在於建立一個以學校為中心的小學教師數學專業發展模式。此教師專業發展模式的建立，目的在於發展數學教師之學生數學認知知識，以協助教師對學生學習有更多的瞭解，並能提昇教師在數學課室內教學實踐的能力。本研究以協同行動研究的方式在新竹市頂埔國小成立一個以學校為中心的數學專業成長團體，此團體的主要成員為研究者和六位小學數學教師。每週一次兩個半小時的數學成長團體討論會是教師們製造與討論數學教學實踐相關問題的場所；是我們共同解決問題、、大家一起學習、共同分享經驗的時間。本論文主要在描述此數學專業成長模式教師所從事的認知活動、教師在教室現場的數學教學中所遭遇與學童學習相關的問題；並闡述用以協助這群教師解決教學實踐的問題之背後所依循的學童數學認知相關的理論。曾經在成長團體討論會上所討論的議題並尋求解決的有：具體活動、表徵活動、抽象運思活動的區分；一年級兒童發表解題過程的分組實施；算式提早出現的處理；避免兩步驟問題記錄成 5＋2＝7－3＝4 的教學策略；此成長團體幫助教師建立與兒童數學學習相關的認知，諸如：一年級兒童在添加型的情境並不將 4＋3＝7 和 3＋4＝7 視為一樣；一年級兒童無法理解以 ”像「蹺蹺板」” 來解釋等號「＝」的意義。

關鍵詞：數學專業發展模式　協同成長團體　協同行動研究

林碧珍（2000）：一個以學童數學認知為基礎的小學教師數學專業發展模式。八十八學年度師範院校教育學術論文集，(pp.1-34)，國立台北師範學院

一、研究背景

國民小學數學課程標準已於民國八十二年由教育部公佈（教育部，民 82），並於八十五年九月起全面實施，八十二年課程除延續民國六十四年課程的特色外，在數學教育目標與教學方法上作了突破性的改變，以因應時代之變遷、社會之需要，並落實人本教育所倡導之以「兒童為本位」之教育理念。

八十二年課程和六十四年課程最大的相異點是「數學課室內培養兒童的解題文化」，兒童被視為是教室中社會互動的主要活動者，是數學課室內共同合作的學習者而非競爭者；教師是解題活動的「佈題者」或討論的「促進者」而非「解題者」。這次數學課程改革，強調教室內以學生為主體的文化，教師必須拋棄沿襲已久的「權威者」的角色，教師本身由教室中的主體轉為客體，學生由過去的客體成為學習環境的主體。這一波數學課程的改革，教師們所面臨的不僅是專業知識與能力的挑戰，而且還要調適自己「由主為賓」的角色所帶來在心理上的衝突與矛盾。由於教師必須改變自己習慣的教學生活方式，去面對課程改革的不確定性、焦慮、和恐懼，對教師而言，是一種很大的挑戰；另外，這次的數學課程改革，對於許多老師而言不夠明確，所倡導的教學方法備感複雜；課程的設計改變太大，與教師原有的專業知能相去太遠，這些都影響數學課程改革的落實（蕭昭君，民 87）。

當前的在職教育，不管是課程改革之前或之後，皆未讓教師充分的了解自己在課程改革中所應扮演的角色，教師沒有充分的認識與自我調整就被迫在教室現場使用新課程，而降低課程改革的品質。為提昇課程改革的品質，再教育（re-education）和再社會化（re-socialization）是教師在職教育的兩個主要領域（Patterson & Czajkowski ,1979），再教育是在發展執行新課程時所需的能力，再社會化是在發展課程實施時所需的角色和角色之間的關係。本研究並不採取傳統以專家提供專業課程或舉辦數小時的研討會方式進行在職進修，而以透過協同行動研究的方式以學校為中心組成數學成長團體的專業發展模式，因為傳統的教師進修教育容易造成教師成為知識的被動接受者，導致教師缺乏專業成長的主動性，忽略共同成長與終生學習的必要性（饒見維，民 85）。因為行動研究確實能縮短教師之教學理想與其實踐之間的差距，有助於提昇教師教學之信心（Elliot,1993; Webb, 1990）。行動研究能用於學校與教室，主要是它能加強教師的自我知覺能力及批判能力（Cohen & Manion ，1984）。故本研究是由師範院校與一所小學之教師共同合作組成一個數學成長團體，提供在職教師再教育及再社會化的機會，以協助教師培養課程實施所需具備的專業素養。

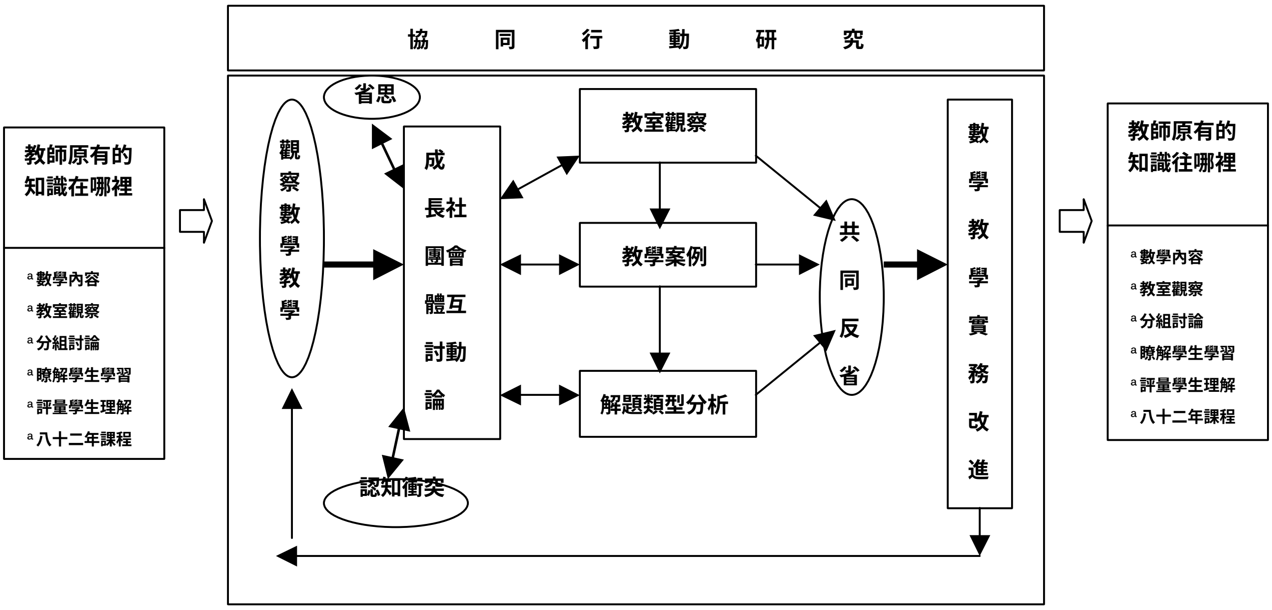
雖然教育行動研究的文獻指出協同行動研究（collaborative action research）相異於協同成長團體（co-development group）。協同行動研究比起協同成長團體在研究上要求較為嚴謹，並對教育實踐隨時要求作反省（陳惠邦，民87）。由於本研究要求協同成長團體之研究教師隨時不斷地作反省，而且研究過程亦達到協同行動研究嚴謹性的要求，因此本研究並不特別區分協同行動研究和協同成長團體的不同，在內文中並不刻意的區分「協同行動研究」和「協同成長團體」兩詞的使用。

二、以學校中心的小學教師數學專業發展模式的簡述

本研究在於建立一個以學校為中心的小學教師數學專業發展模式，其目的在發展教師之學生數學認知知識，以協助教師對學生數學學習有更多的瞭解，並能提昇教師在數學課室中教學實踐的能力。由國小師資培育機構與新竹市一所小學共同合作組成一個協同成長團體，透過行動研究的方式協助教師解決數學教學實踐的問題。協同成長團體主要成員包括研究者及六位小學教師（蓉蓉、惠惠、素素、芬芬、又又、玲玲）。六位小學教師在研究中所扮演的是研究者與教學者的角色，他們被研究者期望成為一個主動的學習者、自我發展者、問題解決者、教學實踐者，及研究的共同設計者。他們必須共同參與成長團體的聚會，反省討論教學的實踐過程與結果，然後再回到教室中實踐反省與澄清有關數學教學與學習的知識和信念。

本研究所進行的所有活動是在協助教師提昇其專業知識並發展教師的課程實踐知識，如下頁之圖一「以學校為中心的協同成長團體專業發展模式」，是描述在協同成長團體中所進行的主要活動。圖中「教師原有的知識在哪裡」是用來描述教師加入成長團體時，原先的知識是什麼？本研究將「教師原有的知識在哪裡」定義為教師在協同成長團體中第一次所呈現的或被觀察到的想法或教學行為。本研究之「教師原有的知識往哪裡」定義為教師在協同成長團體隨著研究的實施階段在某一段落所呈現的或被觀察到的想法或行為。教師原有的知識自「在哪裡」發展「往哪裡」，是在說明以學校為中心的小學教師數學專業發展模式如何有效地協助參與研究教師成長？本模式不以「教師原有的知識到哪裡」一詞，而以「教師原有的知識往哪裡」一詞取代，主要在於教師在協同成長團體的知識是不斷地在發展改變，綿延不斷的茁壯。參與研究教師在研究過程中所被觀察到的「原有的知識在哪裡」包括教師的課程知識、評量學生理解的認知、瞭解學生學習的認知、分組討論的認知、教室觀察的認知、特定

數學內容之瞭解等項目。「教師原有的知識在哪裡」與「教師原有的知識往哪裡」兩者的差異並不在強調量變而是在質變。本研究有關「教師原有的知識在哪裡」透過協同行動研究的專業發展至「教師原有的知識往哪裡」之間的質變是作為描述教師如何的成長與改變之指標。有關教師參與成長團體前後在專業知識方面的質變，已在林碧珍和蔡文煥的 ”以學校為中心的小學教師數學專業發展模式” 論文中描述（民 88），特別是參與研究教師在加入成長團體前後有關教師對八十二年課程的認知和評量學生理解的認知之轉變。



圖一　以學校中心的小學教師數學專業發展模式（引自林碧珍、蔡文煥，民 88）

在協同成長團體中，成長團體成員所進行的各項活動是促成教師專業發展的主要動力，這些活動包括每週定期一次的協同成長團體討論會，彼此共同分享教學經驗，共同解決教室中的數學教學問題；三項學習任務：教室觀察、教學案例的發展、學生解題類型的分析是協助教師發展有關學生認知知識的必要成分；透過教師在成長團體的「社會互動」而促進教師「省思」的機會，也因而造成教師的「認知衝突」，「社會互動」「省思」「認知衝突」三者是加速教師專業知識發展之催化劑（林碧珍、蔡文煥，民 88）。

林碧珍（2000）：一個以學童數學認知為基礎的小學教師數學專業發展模式。八十八學年度師範院校教育學術論文集，(pp.1-34)，國立台北師範學院

三、數學教學實踐中所遭遇的問題

本篇論文即在幫助讀者瞭解參與本研究之小學教師在協同成長團體中從事哪些認知的活動？如何從事這些認知的活動？這些活動並非是研究者預先計劃安排的, 完全是來自於教師在進行數學課室內的教學活動後, 經過成員們在成長團體討論中彼此間交換經驗、交換觀點、進行專業的對話或辯證後所達成的共識活動。在成長團體中討論的問題，有些是教師們為解決教學中實際問題而提出來的，有些是研究者在成長團體中觀察到已經被教師們視為是理所當然之有關教學或學童學習需再更進一步去澄清，而提出的問題，這些被視為理所當然的問題之提出，是用來提昇教師的自覺能力。自教學情境中所引發的教學問題而曾經在數學成長團體中討論的有：教師不瞭解具體活動和表徵活動之區分, 一年級兒童有能力進行小組合作的學習嗎？算式的提早出現應該是被鼓勵或被抑制？解題策略的「效率」要教師為孩子決定嗎？兒童記錄成 5＋2＝7－3＝4 該怎麼辦？對一年級兒童而言 3＋4＝7 和 4＋3＝7 是一樣嗎？……等等。這些問題也正是目前正在教室內實踐依據八十二年課程標準所編製的數學教材之教師們所面臨的相同問題。

成長團體討論會是我們製造問題討論的地方，也是我們共同解決問題的場所，亦是我們共同學習的場所。成員間之「平等溝通」是協同成長團體討論會所秉持的原則，研究者嘗試去維持成員間外在平等的發言機會與權利。由於協同成長團體之每位成員各帶著不同的信念、動機、經驗、背景來參加成長團體討論會，教師被視為是有較多的實踐教學經驗, 而研究者則被期待為是帶有比較多的理論成份進入這個成長團體討論會。到底研究者在成長團體的討論會中帶著哪些與學生數學認知相關的理論或實徵研究的結果, 來協助教師解決教學實踐的問題？這篇論文主要在描述研究者在數學成長團體中協助教師們解決教學實踐問題所持有與學生數學認知相關的理論。這些用以解決教學實踐問題背後所支撐的理論，將分別依待解決的問題描述在各小節中。

（一）何謂具體活動？表徵活動？抽象運思活動？

Bruner (1996) 是以兒童運思活動仰賴外在刺激的程度來決定兒童心智的成長。Bruner 是以動作的（enactive)、圖像的（iconic)、和符號的（symbolic）三種表徵用來代表運思的活動的不同程度。兒童獲得一個數學概念的過程是以直線方式從動作表徵運思進階到圖像表徵，最後到抽象運思。動作表徵運思是兒童的運思必須借助於實物或具體物的實際操弄活動來達成；圖像表徵是當具體物消失時，在兒童的腦中

能依據實物的影像，自己製作心像而進行內在的運思活動；達到運思的活動階段的兒童能以抽象運思的數學符號進行運思的活動。

Lesh（1979）將 Bruner 的動作、圖像、和符號表徵的運思活動以直線方式的發展修正為平面網狀式的互動發展而提出數學學習的五種表徵：實際情境（real-world situations）、圖畫（pictorial）、教具（manipulative aids）、口語符號（spoken symbols）、書寫符號（written symbols）。Lesh 認為數學的學習，除了 Bruner 的表徵理論強調在深度的提昇外，加強廣度的學習有助於深度的提昇。因此他增加了實物情境和口語符號兩種表徵，並且強調各種表徵之內和表徵之間的轉換（translations）。

以 Bruner 的表徵學習和 Lesh 的五種表徵來分析具體物表徵、圖畫表徵、符號表徵時，本質上它們是有差別的。具體物的表徵是以具體可觸摸的物件（如花片）取代實物，但不失原物的可操作特性之運思活動的材料。圖像表徵是當物體消失而能在心中製作原物的影像作為運思的材料，在一年級的兒童中常見的圖畫表徵就是畫○。從運思的觀點，符號的表徵是代表抽象運思活動的材料，以符號作為運思活動材料的兒童，其運思活動不需再仰賴於具體物或圖像的操弄。從文化的觀點，符號表徵不僅是個人心智活動的材料，而且是一種文化規約的溝通工具。符號既是約定俗成的，由於使用者不是生存於符號誕生的當時，不了解其被規約的源由，所以符號的來源對使用者而言是毫無真理可言。在數學的學習上，除非瞭解此符號表徵實質上所代表的意義，否則造成兒童數學符號表徵理解的困難。

六十四年版的數學教材和八十二年版的數學教材以不同的觀點處理有關兒童自具體、半具體、乃至抽象的數學學習運思活動。六十四年版的教材將具體物（如花片、彈珠）視為是處於具體運思期的兒童最具代表性的運思材料；畫圈圈則是圖像運思期的兒童代表性的運思材料；抽象的數學符號是符號表徵運思期兒童的運思材料。然而，八十二年版的教材並不以運思材料的具體程度來區分，而是以兒童在進行解題活動時，製作運思材料自發性的程度，作為主要區分運思材料的自發性程度有具體活動和表徵活動之分。具體活動是兒童必需依賴具體的表徵方能進行解題活動；表徵活動是兒童可以自行製作具體表徵以進行解題的活動。六十四年版的教材將花片視為是具體物，圈圈○視為是半具體物；但八十二年版的教材，圈圈○能被視為是半具體物，必需建基於它是兒童自發性的建構（甯自強，民 82）。具體物（花片）或半具體物（圈圈○），皆可能成為兒童進行表徵活動時的溝通材料。在下面的例一和例二是用來

說明具體活動和表徵活動的區別。

例一：1.樹上有 5 隻小鳥，拿出花片擺擺看。

2.再飛來 4 隻，拿出花片擺擺看。

3.現在有幾隻小鳥？（ 國立編譯館民 85，P.12）

此例子是以分段布題的方式逐一要求兒童具體做出小鳥的數量，兒童被指定使用具體物（花片）進行「現在有幾隻小鳥？」的具體活動。

例二：1.媽媽買了 5 個紅蘋果和 3 個青蘋果，共買了多少個蘋果？

2.你怎麼知道的？（ 國立編譯館 民 85，P.13）

在例二的題目是一次佈題完成，在題目上也沒有要求兒童一定要用花片進行解題，當兒童被要求去解釋如何做出來時，兒童若能自行採用花片，或畫○來代替蘋果；此時，花片或其他物件雖是具體可移動的，圈圈○是圖像表徵，它們皆成為兒童進行表徵活動的材料。

具體物表徵和圖畫表徵除了作為兒童心智活動運思的材料外，亦是教師用來作為溝通題目的工具。在例一中，「樹上有 5 隻小鳥，拿出花片擺擺看」，此時的具體物表徵花片是用來協助教師溝通題意，具體物和圖畫表徵也是用來協助兒童溝通其解題過程。在例二中，佈題一次完成，當學童逐漸使用心像進行運思時，不易觀察其解題過程，兒童若被要求重述其解題過程時，具體物與圖畫表徵成為是必要的工具（蔣治邦，民 83）。

在一年級的教材中，兒童接觸最頻繁的符號表徵活動，是數詞、「＋」、「－」、「＝」和算式記錄，算式是將數字、運算符號、和等號以一定的組織方式來呈現一個運算過程與結果。從兒童學習的觀點，當兒童進行解題活動時，是由具體活動進展至表徵活動，循序漸進至抽象運思活動，具體活動和表徵活動是用來協助兒童進行抽象運思活動後描述其解題歷程的一種溝通活動。

然而，正在使用八十二年版數學教材的教師們，仍然不瞭解新教材對兒童學習的強調是由具體物轉向具體活動，半具體物轉向表徵活動。在成長團體成立不久，當教師們被要求去回答：兒童使用花片和畫圈圈進行解題時，是否為不同的運思活動？依據又又老師對兩者區分的反應，她的認知仍然是以六十四年版教材所採取依可具體操弄的程度而區分具體物和半具體物。又又說：

"花片是可以直接操作的東西，對兒童而言比較簡單、比較具體。在小數的教學，有些學

生需要具體物來操作，因為小數的生活經驗比較少。畫圈或畫圖形也是必要的，它可以把具體物變成平面的東西呈現出來，可以輔助思考。（又又，討論會記錄，981221）”

（二）一年級兒童不會發表解題過程怎麼辦？

在加入協同成長體之初，教師們沒有去釐清具體活動、表徵活動、抽象運思活動的意義及其目的，因此當兒童的算式記錄提早出現時，教師有高估兒童實際能力的可能；當兒童不會表達自己解題的過程時，教師將其罪咎歸因於兒童尚停滯於自我中心時期，或家長的提早教學。惠惠老師敘述著：

“例如：「有 6 顆糖果給了弟弟 4 顆，剩下幾顆糖果？」學生用心算或手指來做，但不會描述自己的過程，我感覺上還是蠻痛苦的，有點變得比較嚴肅。我覺得他們在家裡或在幼稚園，媽媽常常教他們練習心算，反而不太去操作。（惠惠，晤談記錄，981021）”

兒童不會描述自己的解題過程是成員們在初入成長團體時一直困擾的問題，蓉蓉老師說：

“我們班上有三分之一的人會操作，但是要他們說出理由，他們不知道要怎麼樣說，尤其像現在的題目，小孩子用心算就算得出來，可是您要他說為什麼，他不知道要怎麼說。（蓉蓉，晤談記錄，981106）”

羅伊德（Lloyd）曾經研究以兒童與一隻會說話的玩具貓熊溝通的實驗，從實驗中發現兒童具有相當能力可以去幫助貓熊作溝通，但是當兒童自己本身需要別人幫助時，兒童卻不知如何表達，因為兒童並沒有被告知自己所接受到的訊息不完全，而且兒童通常不會主動地要求更多的資訊。羅伊德指出並沒有什麼證據顯示自我中心的存在會造成溝通上嚴重的困難（漢菊德、陳正乾，民 85）。蓉蓉和玲玲老師在成長團體的討論會上舉出曾經在他們教學中所發生的例證，也和羅伊德的研究發現一樣，沒有什麼證據顯示自我中心的存在會造成溝通上嚴重的困難。蓉蓉老師說：

“其實孩子的表達能力都還在慢慢學習當中，會發表的學生就多出來講幾次，其他的小朋友會說這樣好簡單啊，我也會。下一次他就說他要講。（蓉蓉，晤談記錄，981113）“

玲玲說：

“他們[學生]現在比較能夠去把他們寫的講出來，以前比較不知道老師要的重點是什麼，沒辦法說得很完整，以前同學還傻傻的坐著，現在討論的時候同意的比較多，不同意的也有一些。…..

……現在情形好多了，不會像剛開學時那樣鬧哄哄的，然後解題也會整組討論。（玲玲，晤談記錄，981218）”

四人為一組是比較適合於小組成員間互動的分組方式，它是從成長團體討論會中所建立的共識之一。在我們第一次觀察 11 月 6 日的教學中，素素老師是採取每個人在小組中各需擔負不同的角色分配的分組方式，每組中的四人之職責分別是：一人負

責思考問題，一人負責將答案寫在白板上，一人司組內秩序，一人負責上台發表報告。由於這樣不適當的角色分配而造成小組內與小組間溝通困難。當在進行解題的教學過程時，由於負責上台發表的小朋友卻無所適從而呆坐在椅子上或者擾亂秩序；負責思考問題的小朋友與負責寫白板的小朋友由於各司其被指派的任務，以此角色分配的分組方式名義上是達到小組分工卻未達到小組合作學習的目的，也剝奪了小組成員間溝通協調的機會。當教學過程進行到解題方法的發表時，負責發表的小朋友由於缺乏先前與小組成員的討論，而且想法和答案都是同組的其他成員的，故無法說明或解釋該組在白板上的解題記錄的意義。

蓉蓉和惠惠老師也在自己的教學中採用四人為一小組的分組方式，經過自己實際的教學實踐，他們同意每組四人確實比較能提供組內成員間平等溝通的機會。惠惠老師說：

> "我在想說四個人一組真的很不錯，以前我都是六個人一組，太遠了一點，現在四個人討論的效果很不錯。（惠惠，晤談記錄，981218）

當她被問及如何分配小組成員的角色時，她說：

> "我都是像今天組長寫，然後就換組長對面的寫，明天想到就組長旁邊的寫，我比較沒有固定。（惠惠，晤談記錄，981218）

（三）教師需要告訴兒童有規律地去找出所有的答案嗎？

玲玲老師在初加入成長團體時提供了在她的教學中所發生的一個例子，例如：「8 個花片分成兩堆，可以怎麼分？」當她把 8 個花片發給每組 4 個人時，由於玲玲沒有提供每人足夠的花片，而使得教室中出現組內病態的社會運作。病態的組內社會運作是每組的每個人都想要分花片，大家都在搶花片，搶到花片的人分好兩堆後，另外一個人又搶過去再分。這個時候的玲玲認為是因為孩子的自我中心太強而有搶花片的場面發生，而且學生最後給她的答案是兩堆數量的數字（6 和 2；7 和 1），而非以畫圈圈或操作花片的方式，她覺得學生的能力已超越老師的要求了。

在成長團體剛成立的不久，玲玲老師稱得上是屬於在成長團體討論會上提出比較多有關教學上的疑惑之一個成員，諸如：當小朋友上台操作花片時，將 9 個花片分成兩堆，他們不是很有系統的分出兩堆（1 個和 8 個，2 個和 7 個，然後 3 個和 6 個），而是任意的跳來跳去。玲玲質疑是否需要告訴學生把所有可能的答案以有規律的方式一一找出所有答案來？

孩子自己能主動地從解題的探索過程中發現規律性（patterns）是八十二年課程

所要培養孩子的數學能力之一。以玲玲所提出的教學例子，在成長團體討論會上的成員們認為孩子沒有發現 9 個花片分成兩堆的規律性，不是兒童不能，而是玲玲老師沒有提供足夠數量的花片讓組內的每個成員同時操作，而造成學生之間搶花片的混亂場面。玲玲老師只分 9 個花片給 4 人一組使用，在這樣的教具數量的限制之下，期待孩子有多種的分法，是不可能的。從兒童的記憶存量觀點分析，一個學生將此 9 個花片分成兩堆（4 個，5 個）後，當要再以此 9 個花片分成兩堆，此時原來的兩堆（4 個和 5 個）從孩子的視覺上已消失了，一年級的兒童難以記得剛剛分得的兩堆數量。經過成長團體成員們的討論，「提供每組足夠的花片數量」是我們認為可以解決玲玲的疑惑的方法，這是我們成員間在成長團體討論會上所達成的共識。我們給玲玲老師的建議是：每人將 9 個花片分成兩堆，然後再比較同組的四個人的分法是否一樣？接下來，再請每人各拿出 9 個花片分成兩堆，請組內成員將分法不同的留在桌面上，如此即可以看到各組的各種不同分法。待全班討論時，將所有的不同分法請學生一一地由多而少或由少至多的方式呈現，如此學生即有機會以有規律的方法去找出各種不同的分法。

（四）算式提早出現怎麼辦？

成長團體成員在討論會中也提到，老師還沒教學生算式前，算式就先出現了，在一年級上學期加與減（一）（康軒文化，民 87）的單元教學目標是解決合成和分解問題的表徵活動，但是孩子早已從學校之外學習以算式來解題，由於孩子缺乏具體活動的經驗，教師不知去釐清具體活動、以具體物或圖像的表徵活動、和算式記錄之表徵活動的區分，而造成教師在教學的困擾。此種不符合教師要求的算式提早出現，在成長團體尚未進入討論該議題之前，當成長團體之教師被要求去描述他們原先的處理方式是如何時，素素老師說：

> “在第五單元分與合，有一個問題是：「爸爸釣到 9 條魚，送給叔叔 3 條，還剩下多少條魚？說說看，您怎麼做的？」在全班的八組中，有七組的小朋友都知道 9－3＝6，其中有一組寫 9、3、6，中間沒有「＋」、「－」、「＝」這些符號，而變成 936（九百三十六），所以他們有些會用數學式子來表示，我沒有說不准他們。（素素，討論會記錄，981023）”

玲玲老師在一次的晤談中，提到當學生用算式解題，要孩子倒回重新建構以畫圈圈的方式表示，確實有點困難，她對於算式提早出現的處理方式是：

> “因為我之前有跟他們講，老師還沒有教算式，所以還不要用算式。（玲玲，討論會記錄，981109）”

芬芬老師在蓉蓉老師的教學檢討會中提出她所實際觀察到的現象是：孩子似乎都能用花片排出「操場上有 6 個小朋友在玩沙，又來了 3 個，現在有多少個小朋友在玩沙？」而且他們用花片排出的方式相當多，但從排花片轉換到畫圈圈的方式來記錄解題過程，孩子似乎有困難。芬芬老師又補充著：

> “當家人已經教他們 6＋3＝9，他已經會了，我認為寫出算式也無所謂……。其實如果他寫得出 6＋3＝9，他大概也知道意義。……其實現在這種情況在教學中常常出現，一開始就先用算式算，因為他已經會了。（芬芬，討論會記錄，981109）”

又又老師並不認同芬芬老師的說詞，她說：

> “有的孩子用算式有可能因為真的瞭解，因為有學過算式，所以會用那種模式再套入；有的可能只記得那個樣子，把數字抓來就套進去，像在上一次素素的班上就有學生莫名奇妙的寫出 100＋100＝200，就可以知道他完全不知道那個算式的意義。（又又，討論會記錄，981109）”

算式的提早出現，本來是芬芬老師視為是理所當然的事實，在討論會中由於教師們彼此交換不同的觀點，而燃起玲玲和芬芬老師對孩子算式使用的質疑，孩子算式的提早出現應該如何處理？是限制它或有其他的方式？由於這一次成長團體討論會激烈的爭辯，使得成員們更加地認真去思索在教室中所觀察到的一些現象，諸如：由於這一場的討論會而讓玲玲知覺到孩子的算式記錄解題活動是在具體活動和具體物或圖像的表徵活動的學習之後才發生的。因而，11 月初在蓉蓉老師的一次現場教學的觀察中，玲玲老師有能力洞察到在蓉蓉班上的孩子的建構過程並不是依此順序進行，玲玲老師所舉出的具體例證是：

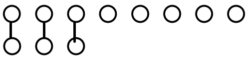
> “「在操場上有 6 個球，小芳拿走了 2 個，現在剩下幾個球？」，小朋友先出現 6－2＝4，再補畫圈圈，在 6－2＝4 的下方畫 6 個○再寫「－」再畫 2 個○，再寫「＝」，最後再畫 4 個○，而變成○○○○○○－○○＝○○○○。這種建構的過程似乎有問題。（玲玲，討論會記錄，981109）”

在教室觀察中，玲玲老師能察覺出孩子是先寫出算式；再用圖示的方式表徵解題過程是為了符合老師的要求。由於玲玲覺察於此也引起蓉蓉老師的共鳴，蓉蓉老師也接著提出：

> ”在玲玲的教學中，我也觀察到學生用算式表示的比較多，不知道事先寫好算式再畫圈圈，還是先畫圈圈？（蓉蓉，討論會記錄，981109）”

成員們在成長團體討論會中關於兒童算式提早出現的觀點之形成歷程，是先自視為「理所當然的事實」而開始產生「質疑」，成為一個可「辯證的議題」，然後至「以能操弄的具體物或不可操弄的圖示表徵活動是先於算式記錄的表徵活動」的「釐清」。在此次的討論會中，當教師們正埋首討論孩子的「先出現算式再補畫○」的逆向建

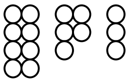
構過程時，研究者認為即使孩子用○○○○○○－○○＝○○○○來表示 6－2＝4 仍然沒有表示出 6－2＝4 中之「－」和「＝」的意義。研究者提出素素老師在 11 月 6 日的教學中所給定的題目：「8 個小朋友溜滑梯，3 個小朋友盪鞦韆，哪一邊的小朋友多，多多少？」，全班八組的小朋友有下面的 5 種解法，為造成教師們在認知上的衝突，她們被要求去深思兒童所畫的○是否能代表兒童真正的表徵活動，她們本來誤認為○○○○○○－○○＝○○○○是可以用來表示 6－2＝4 的圖象表徵。

¿ 

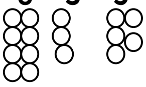
À 8＋5＝13

100＋100＝200

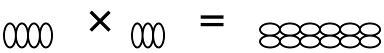
Á 8－5＝3



Â 8－3＝5



Ã 

Â是老師們在所有的解法中毫不猶豫地視為是合理的解法之一；緊接著，教師們被要求問及「一隻青蛙有 4 條腿，3 隻青蛙共有幾條腿？」時，解法Â的學生也用  **是否真正表示 4×3＝12 的意義呢？由於此一當頭棒喝的例子而使得成長團體教師們重新組織腦子中原先架設好的認知結構網；此時，他們才恍然大悟，**  **才是「8 個溜滑梯的小朋友比 3 個盪鞦韆的小朋友多 5 個」的表徵活動，**  **才是「一隻青蛙 4 條腿，3 隻青蛙共有 12 條腿」的表徵活動。由於學生缺乏之前必要的「具體活動」經驗，使得學生表現的是一種假象的「表徵活動」。在討論會上，教師們被建議在教學中去使用「分段佈題」以豐富孩子的具體活動經驗。**

「分段佈題」是將一個合成或分解問題，分解成兩個做數活動和一個數數活動的過程。例如：假如教師的佈題方式是：「操場上有 6 粒球，拿走了 2 粒球，現在操場上有幾粒球？」是將題目的敘述一次呈現。若教師是以「分段佈題」方式呈現，則是以「操場上有 6 粒球，用花片做做看；拿走了 2 粒球，用花片做做看，數數看現在還

有幾粒球？」方式來呈現問題。

在有關「分段佈題」的討論會後，成員中蓉蓉和素素老師尚有機會實踐「分段佈題」於康軒版本第六單元加與減（一）的教學中，發現「分段佈題」確實能避免孩子的算式提早出現於教學中。蓉蓉老師提到：

> “林教授提到「分段佈題」,（如操場上有 6 粒球，先用花片做做看，然後拿走 2 粒球，用花片做做看，現在有 4 粒球？）。後來回想起來，真的是受益良多。因為在這個教學之前，我有參考其他版本的參考書像國編本，我有看到「分段佈題」，那時候〔二年前〕不曉得它的意義何在？或者怎麼用？後來那天教授提出來，我才知道原來是這樣，後來我就用這樣的方式進行教學，覺得學生的解題就順暢多了，學生就不會離題意太遠。（蓉蓉，晤談記錄，981113）”

當教師們具有「學生的具體活動與圖像的表徵活動是先於算式記錄的表徵活動」的概念時, 惠惠和玲玲老師也認為有必要與家長溝通有關學生的具體活動和表徵活動的需要性。在一月份的一次晤談中，玲玲老師認為：

> “以老師的立場, 仍有要求學生去經驗具體活動的必要, 不能因為學生出現了算式就以為瞭解了，就可以不管。因此家長會問為什麼這麼做？當與家長溝通之後，家長瞭解之後，會協助孩子去發展具體活動和表徵活動。(玲玲，晤談記錄，990118)”

當孩子學習算式解題後，成長團體的成員們談到他們對孩子數學算式的要求時，數學格式化是他們的最高要求。惠惠老師描述著：

> “在初步階段只要學生講得通合乎邏輯就可以接受，但是到一定程度，還是要格式化，數學不是自己懂即可，還要能跟別人溝通，就一年級來說，剛開始試著去了解他的想法，等到一個階段，還是要求他們能用算式才能跟別人溝通，孩子永遠在畫圈圈，會覺得他們還沒進入狀況的感覺，例如：3 隻鳥加 2 隻鳥合起來是 5 隻鳥，學生畫 5 個○代表 5 隻鳥，初步這樣做還可以接受，但到一個階段還是要達到格式化，寫出 3＋2＝5。如果沒有幫孩子達到格式化的要求時，可能將來至國中會有銜接上的困難，不僅如此，畫圈圈很瑣碎，到某一個程度用格式化來做，反而表達的更清楚。（惠惠，晤談記錄，990115）”

玲玲老師說：

> ”新課程的建構是指在理解的過程中只要說得通即可，可是到最後還是要有一定的格式出來（玲玲，晤談記錄，990115）。”

（五）教師需要告訴兒童哪一個解題策略最有「效率」嗎？

在素素老師進行到加和減（二）單元的教學時，教學目標是以減法列式並解決分解問題，芬芬老師觀察到學生是以 10－7＝3 而非以 9－6＝3 來表示「晶瑩有 9 顆糖，明惠有 6 顆糖，兩人的糖果誰多？誰少？」，這樣的觀察，而引起芬芬老師在成長團體討論會提出了一個教學上的疑惑：當小朋友知道做法之後，如何幫助他們列出正確的算式？下面是參與研究教師的處理方式：

惠惠老師：”現在一年級小朋友經過一學期下來，都蠻能用圖形來表現，有些不太能用算式來表示

，我就請他當場數一數他怎麼做，一個步驟一個步驟的講，幫他引入。幾次之後他就知道怎麼做了。如果都沒寫算式的小朋友，就請他畫圖然後再說明。

玲玲老師：”我引導他們從題目上去找出我們要求的。”

素素老師：”我並沒有告訴學生對不對，而是讓學生去想這樣對不對？小朋友互相指出不對的地方，寫錯的小朋友看他的臉色就知道哪裡不對了，因為小朋友自己的語言比較容易溝通。（討論會記錄，990122）”

當兒童從圖示表徵活動進入算式記錄活動的學習時, 惠惠老師和蓉蓉老師從自己的教學中，發現到：哪一種解法比較有效率是兒童自己決定的，並非由教師替兒童做抉擇的。惠惠老師說：

“自從孩子學習使用算式記錄後，學生的解題方法就不再多樣化了。我們班大概有四組會使用加法算式，有三組還是畫圈圈，即使提示他用算式比較快。（惠惠，晤談記錄，981218）。”

蓉蓉老師在 12 月 21 日的成長團體討論會上, 述及自己當天的教學所採取的教學觀是盡量以尊重孩子用自己的表徵方式來解題, 然後再從經濟效率的觀點引入算式的使用。從教學中，她發現有些小朋友一開始就知道算式的意義和用法，有些小朋友尚停留在畫○或操作花片的階段，這些小朋友無法把題目和算式連結在一起，故還需要畫○，後來，觀察了別人的算式比較快，自己覺得可以脫離畫圈圈，而以算式來取代畫○。蓉蓉老師認為不要強迫孩子去接受「算式是最有效率的方法」，因為，對孩子而言有效率的解法是他們自己決定的。

（六）等號「＝」對一年級學童而言像「蹺蹺板」嗎？

對國小學童而言，等號「＝」的第一次使用是出現在解決合成分解問題的算式記錄中。在觀察蓉蓉老師的教學中，等號「＝」代表兩數量運作「得到」的結果，是一年級兒童所能理解的「＝」的意義。然而，蓉蓉老師由於缺乏孩子的這種認知，在她的教學中，我們觀察到她並不滿意孩子將「＝」解釋為「合起來」或「得到」，因而她立即提出「＝」就是像「蹺蹺板」來解釋，然而當她提出以像「蹺蹺板」來為孩子解釋「＝」的意義時，孩子們的表情更似呆若木雞，因為孩子們無法理解 6－2＝4 的左右兩邊是一樣。從孩子學習的觀點，孩子可以理解「＝」是由左邊兩個數量運作而「變成」或「得到」右邊的數量，因為它是單純的由左往右的單向運作。

其他的成員並不贊同蓉蓉老師提出以像「蹺蹺版」兩邊一樣重的概念來解釋「＝」的意義，他們所持的理由是：

玲玲：”用像「蹺蹺板」兩邊一樣重的解釋，對小朋友而言，會覺得數字沒有重量，小朋友覺得不懂

。”

惠惠：”用「蹺蹺板」對一年級兒童解釋是很不合適的，因為蹺蹺板一次是很多人玩，不是一個對應一個，或是剛好兩邊一樣重，而且對一年級而言，蹺蹺板只是在玩，好像沒有自覺到兩邊一樣重。”

素素：”用「蹺蹺板」來解釋，學生不一定聽得懂，在今天的蓉蓉的教學我們就看到了。”（討論會記錄，990111）。

從數學的觀點，「＝」解釋為像「蹺蹺板」，它是具備了「等價關係」的性質，是等號的另一種意義，它必需滿足反身性（reflexive property）對稱性（symmetric property）和遞移性（transitive property）三種特性，它的瞭解不再僅是單純的由左邊運作而產生右邊結果的單向運思，還需要透過左右兩邊的兩個數量作較為複雜的比較關係，它是雙向性的。例如 6－2＝4 若以像「蹺蹺板」解釋時，並不是單純地如素素老師所言：

”孩子會做 6－2＝4 就瞭解 6－2 和 4 相等。”（素素，討論會記錄，990111）。

一年級兒童無法瞭解一個算式（6－2）和一個數（4）之間的關係，他們僅能瞭解一個數和另一個數之間的大小比較關係。在瞭解一個算式（6－2）和一個數（4）的關係之前，必需先瞭解此算式 6－2 運算後的結果是 4，再與給定的數（4）作比較，再比較出兩個數（4 和 4）的大小關係，從瞭解 4 和 4 相等而發現 6－2 和 4 的相等關係。

（七）一年級兒童記錄兩步驟問題成 5＋2＝7－3＝4 怎麼辦？

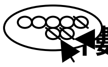
兩步驟問題是指一個問題的算式中必需使用到兩個運算符號。「遊園車上有 5 個人，到了獅子站上來了 2 個人，到了河馬站下去了 3 個人，現在車上有多少人？」此例題需要用「＋」「－」兩個運算符號來列式，5＋2－3＝4，它是一個兩步驟的問題。由題目語意的（semantic）分析，此兩步驟問題具有添加型和拿走型問題的語意結構。從解題歷程分析的觀點，此例題是由五個句子組成，其中有四個句子是明顯地在題目的敘述中呈現。兒童理解此問題所涉及的五個句子的認知歷程可分為階段 I 和階段 II：

階段 I
- ¿指定句（遊園車上有 5 個人）。
- À動作句 I （在獅子園上來了 2 個人）。

階段 II
- Á隱藏句(階段 I 之疑問句，階段 II 之指定句)（遊園車到了獅子站，車上共有多少人）。
- Â動作句 II （在河馬站下去了 3 個人）。
- Ã疑問句（現在遊園車上有多人少？）。

隱藏句Á「遊園車到獅子站時，車上共有多少人？」是沒有明顯地在原問題中呈

現，它同時扮演階段 I 的疑問句和階段 II 的指定句（assignment sentence）的兩種角色。它必須由階段 I 之指定句¿之最初量（5）和動作句 I 之改變量（2）來決定最終量（7）。此隱藏句相當於甯自強（民 82）以『「子」目標的建立』區分兩步驟問題中之「解題所蘊涵的活動」和「題意所蘊涵的活動」之不同。

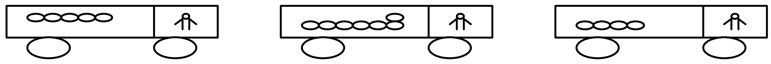
孩子在進行解兩步驟問題時，是否有必要進行隱藏句的運思活動？依據甯自強的解釋，其必要性是決定於孩子數概念的發展時期。他認為屬於「序列性合成運思期」的兒童在解決「遊園車上有 5 個人，到了獅子園上來了 2 人，到了河馬站下去了 3 個人，現在車上有多少人？」時，只要做出 5 個花片，又做出 2 個花片，再拿走 3 個花片，如圖示  數最後的花片而得出 4 個花片。在這個具體活動中並不需要去確定「車子到了獅子站是多少個人」。然而，在「累進性運思期」的兒童在解決遊園車的問題時，要進入解決題目中之階段 II 時，必需先決定階段 II 之指定句，以確定階段 II 之起始量（7），再由 7 往下累減 3，而得到 4 個人。所以在「累進性運思期」的兒童在解決此問題時，隱藏句是由兒童自行建構出來的。

序列性合成運思期的兒童依據表徵活動，很容易依實際的操作過程依加入和移去的順序關係而得到最後的數量，依此表徵活動而記錄為 5＋2－3＝4 的算式記錄，此時的「＝」為兩次操作後「得到」的結果。累進性合成運思的兒童依據其進行的表徵活動，先決定階段 I 的隱藏句的「車上人數」的數量，而記錄為 5＋2＝7；再將此數值作為階段 II 的指定句之最初量，再依據其表徵活動，然後完成階段 II 的問句，記錄為 7－3＝4：此兩個式子中的「＝」均為「得到」的意義。然而，5＋2＝7－3＝4 亦可能是累進性合成運思期的兒童所記錄出的解題記錄，這個記錄顯示出孩子在解決此問題的過程中，有建構隱藏句的歷程，孩子的算式 5＋2＝7－3＝4，確切地記載了兩個階段表徵活動的過程。由於教師認為此記錄不符合「＝」的等價關係，因而不願意接受孩子的算式記錄 5＋2＝7－3＝4。

在協同成長團體所指定的一篇閱讀文章中，正好涉及到兩步驟算式記錄的相關問題，它曾是我們在成長團體中所關心的議題之一。成員們對芬芬老師提出「如何避免 5＋2＝7－3＝4 的出現？」有不同的處理方式？

又又老師認為不同年級有不同的要求，若將「等號」比喻為「天秤」或像「蹺蹺板」時，高年級的學生很容易了解。素素老師的處理方案是需要進一步去詢問寫這樣記錄的小朋友，「＝」前後有沒有相等？蓉蓉老師則提出可以使用「分段布題」的方式，可是在她的教學中大部分學生的記錄是寫成一個列式 5＋2－3＝4。惠惠老師認

為要避免 5＋2＝7－3＝4，可以要求學生用兩個式子表示，對一年級兒童而言，如果用「蹺蹺板」來解釋，他們會聽不懂。她說：”孩子用畫公車圖時，兩個式子自然就會很容易出現啊！”



遊園車　　　　獅子站　　　　河馬站

5＋2＝7　　　7－3＝4

雖然蓉蓉和惠惠老師使用的教學策略比較能讓孩子避免使用 5＋2＝7－3＝4 的解題活動記錄。當比較孩子的記錄活動時，蓉蓉老師是以「分段布題」建立孩子的具體活動，先放 5 個花片再加 2 個花片，再拿走 3 個花片，最後剩下 4 個花片，此 4 個花片是點數操作花片後所得的數量。蓉蓉老師班上的學生並不需要建構出在此題目中內隱的隱藏句，孩子是依操作的先後順序而能將表徵活動記錄成一個式子的算式記錄。

惠惠老師要求孩子畫出「到了獅子站時遊園車上的人數」的圖示，如此的要求是隱含著在強調當解決此問題時，建構隱藏句及算式記錄 5＋2＝7 的必要性。當到了河馬站時，遊園車上的人數是 7－3＝4，此時的 7 並非是原問題中所提供的資訊，是由 7 個中拿走了 3 個，得到 4 個。兒童所獲得的 4 並不是與蓉蓉老師班上的兒童一樣，由操作花片再點數後的數量。

（八）合成分解問題情境的語意結構有何不同？

在合成分解問題情境，問題的語意結構（semantic structure）和未知數的位置是影響兒童解題的決定性因素（Carpenter, 1985; Riley et al., 1983; Verschaffel, et al., 1992; Lin, 1997）。

Riley 等人（1983）以問題的語意結構將加減法文字題分成改變（change）、併加（combine）、比較（compare）三種類型。Carpenter（1985）再增加平衡類（equalize）而將加減法文字題分為四類，【平衡】類是【改變】和【比較】類的混合型。【改變】類型的問題是由一個已知的數量（最初量）經過一個數量的增加或減少的行為改變（改變量），而形成另一個數量（最終量）的問題。由於最初量的增加而形成另一個變為較多的數量，由於最初量的減少而形成另一個變少的數量。Carpenter 特別再細分「改變類」的添加（join）和分離（separate）二種類型，分離型的問題就是我們熟

悉的「拿走型」問題。【比較】類型是比較兩個數量多寡的問題，由於在比較此兩個數量的多寡涉及到何者為比較量（Compared set），何者為參照量（referent set），而區分為「比多」「比少」兩種類型。【併加】類型問題是描述兩個已知數量合起來總量的問題。每一種類型可再依未知數的位置而區分為三種題型，今將合成分解問題依語意結構和未知數的位置的所有類型整理於表一。

表一　合成分解文字題類型及其答對百分比

類型	最終量未知	Riley（1981）	Pauwels（1987）	呂玉琴（民 86）	改變量未知	Riley（1981）	Pauwels（1987）	呂玉琴（民 86）	最初量未知	Rrilay（1981）	Pauwels（1987）	呂玉琴（民 86）
改變類添加型	小華有 5 顆彈珠，小明給他 3 顆，小華現在有幾顆彈珠？	100%（一） 100%（二） 100%（三）	97%（二）	93%（一） 96%（二）	小華有 5 顆彈珠, 小明給他一些彈珠後, 小華現在有 8 顆彈珠, 小明給小華幾顆彈珠？	56%（一） 100%（二） 100%（三）	67%（二）	81%（一） 87%（二）	小華有一些彈珠, 小明給他 3 顆彈珠後, 小華現在有 8 顆彈珠, 小華最初有幾顆彈珠？	28%（一） 80%（二） 95%（三）	43%（二）	73%（一） 88%（二）
改變類拿走型	小華有 8 顆彈珠，他給小明 5 顆後，小華剩下幾顆彈珠？	100%（一） 100%（二） 100%（三）	88%（二）	78%（一） 92%（二）	小華有 8 顆彈珠, 他給小明一些彈珠後，剩下 3 顆，他給小明多少顆？	78%（一） 100%（二） 100%（三）	83%（二）	78%（一） 91%（二）	小華有一些彈珠, 他給小明 5 顆後，剩下 3 顆，小華原有多少顆彈珠？	39%（一） 70%（二） 80%（三）	78%（二）	83%（一） 89%（二）
併加類	總集合未知				子集合未知				子集合未知			
	小華有 5 顆紅色彈珠和 3 顆藍色彈珠，小華共有多少顆彈珠？	100%（一） 100%（二） 100%（三）	83%（二）	95%（一） 97%（二）	小華有 8 顆彈珠, 其中有 5 顆是紅色的, 其餘是藍色的, 小華有多少顆是藍色彈珠？	39%（一） 70%（二） 100%（三）	98%（二）	68%（一） 88%（二）	小華有 8 顆彈珠, 其中有些是紅色的，其餘的 5 顆是藍色的, 小華有多少顆紅色彈珠？	－－	－－	－－
比較類比多	差量未知				參照量未知				比較量未知			
	小華有 8 顆彈珠，小明有 5 顆彈珠，小華比小明多多少顆彈珠？	28%（一） 85%（二） 100%（三）	79%（二）	72%（一） 90%（二）	小華有 8 顆彈珠, 小華比小明多 3 顆彈珠, 小明有多少顆彈珠？	11%（一） 65%（二） 75%（三）	46%（二）	73%（一） 85%（二）	小華有 5 顆彈珠, 小華比小明多 3 顆彈珠, 小明有多少顆彈珠？	17%（一） 80%（二） 100%（三）	47%（二）	58%（一） 79%（二）
比較類比少	小華有 8 顆彈珠，小明有 5 顆彈珠，小明比小華少多少顆彈珠？	22%（一） 75%（二） 100%（三）	78%（二）	82%（一） 93%（二）	小華有 8 顆彈珠, 小華比小明少 3 顆彈珠, 小明有多少顆彈珠？	6%（一） 35%（二） 75%（三）	38%（二）	66%（一） 87%（二）	小華有 5 顆彈珠, 小華比小明少 3 顆彈珠, 小明有多少顆彈珠？	28%（一） 90%（二） 95%（三）	44%（二）	58%（一） 72%（二）

註：Pauwels（1987）（取自 DeCorte & Verschaffel，1991）
註：（一）（二）（三）表示受試樣本的年級。

Pauwels（1987）；Riley 等人（1981）；和呂玉琴（民 86）的研究一致地發現：在【改變】類型中，不管是添加型或拿走型，以最初量未知的問題較為困難；換言之，未知數所在的位置愈在前面，則難度越高。難度增高的原因是由於語意結構與兒童解題的策略所所衝突（Willis & Fuson, 1988 ; Riley, 1981）。「小華有一些彈珠，小明給小華 3 顆後，小華現在有 8 顆彈珠，小華最初有幾顆彈珠？」是一個改變類「添加型」最初量未知的問題情境。從語意結構上，小明給小華 3 顆彈後，使得小華的量增加了，兒童使用的對應策略是往上累加的策略。而實際上在數學格式化的要求下，卻反而需轉換為最終量減去改變量，才能得到最初量。如果兒童的發展時期尚處於完全仰賴題目中的增加或減少的語意來掌握數量間的關係，尚未能進行「最初量和改變量合成為最終量」和「最終量能分出最初量和改變量」之間的可逆關係，兒童僅能將問題記錄成（　　）＋3＝8，但尚無法轉換成 8－3＝5 的列式記錄。

在【比較】類型中，問題中未知數所在的位置愈在前面，並不是決定問題難度的

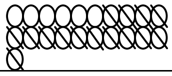
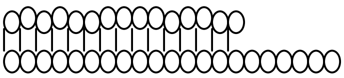
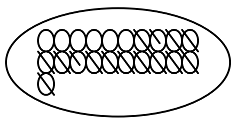
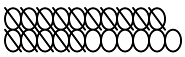
主要因素，參照量未知是「比較」類型問題中最困難的類型。問題的難度增高是由於受到題目中的敘述語詞的不一致性的影響（Lewis & Mayer, 1987; Verschaffel, et al., 1992; Verschaffel, 1994; Lin, 1997）。一致性語言的比較類型問題定義為當題目中的未知數是關係句中的主詞而且關係詞與運算符號相一致。「小明有 5 顆彈珠，小華比小明多 3 顆彈珠，小華有多少顆彈珠？」是一個具有一致性語言的比較型問題，小華的彈珠數量是未知數，小華是關係句子中的主詞，而且「比多」與「加法」相對應，在表一中是屬於比較類型的比較量未知。不一致性語言的比較類型問題為當題目中的未知數是關係句中的受詞，而且關係詞與運算符號「＋」不一致。「小華有 8 顆彈珠，小華比小明多 3 顆彈珠，小明有多少顆彈珠？」為一個具有不一致性語言的比較型問題，小明的彈珠數量是未知數，是關係句中的受詞，而且關係詞「比多」是與減法運算「－」有不一致的對應，在表一中是屬於比較類型的參照量未知。

有關教師對於加減法文字題的認知，多次反應在數學成長團體的討論會上。從多次的討論會中，可以看到教師們在加減法文字題認知上的成長，當比較教師初加入成長團體的第一次討論會與在第一學期末實施「教師對學生之加減法問題瞭解」之前後測，表二之資料顯示教師在加入成長團體的活動之後能列出比較多的有關學生在解決「花園裡有紅花 15 朵，白花 21 朵，紅花比白花少幾朵？」的方法和比較能具體地說明學生解決問題的困難在哪裡，而且能提出更多的理由來解釋學生解題困難的原因。在初入成長團體時，成員們提出學生能解決一個「比少」問題的策略僅止於算式或只給答案；並僅能提出二個造成學生解題困難的原因：¿ "少" 對孩子而言較為困難，À題目中的敘述詞「紅花比白花少幾朵」與較多數量的白花無法互相呼應。

從表二中問題一的資料顯示：教師們在加入成長團體後能提出學生更多的解題方法，所列出的解題方法不僅是算式列式而且更包含了不同的表徵型式；再者，教師們比較能清楚而具體地提出造成學生學習困難的原因。他們認為學生解【比較】類型的「比少」問題所遭遇的困難是由於：¿比較型問題是屬於比較高層次的加減法文字題類型；À「誰比誰少」比「誰比誰多」較為困難；Á題意和順序無法對應，在題目的敘述上，少的在前面多的在後面與題目中「紅花比白花」不容易對應。

表二 教師對學生之加減法問題瞭解

問題一：花園裡有紅花 15 朵，白花 21 朵，紅花比白花少幾朵？ 您認為兒童會出現哪些不同的解法？學生解這個問題的困難在哪裡？為什麼？		
【前測】	兒童可能的答案	造成學生學習困難的理由

惠惠	（1） 15＋21＝36 （2） 15＋（ ）＝21，（ ）＝6 （3） 21－（ ）＝15，（ ）＝6 （4） 計算錯誤	a “少”對孩子而言較難 a 計算不熟練常出錯也是學習障礙
玲玲	（1） 36 （2） 6 （3） 5	a 不懂「少幾朵」的差別 a 一對一對應，沒有確實對應
蓉蓉	（1） 15＋21＝36 （2） 15＋（ ）＝21 （3） 21－（ ）＝15 （4） 15－21＝（6） （5） 21－15＝（6）	a 題目是逆向的敘述，思考上需「轉彎」至高階層思考 a 逆向敘述：¿題目多的在後面 À紅花比白花少幾朵
素素	（1） 6 （2） 5 （3） 16	退位減較難
【後測】	兒童可能的答案	造成學生學習困難的理由
惠惠	(1) 15＋（ ）＝21，（ ）＝6 (2) 21－15＝6 (3) 	比較型的問題對孩子來說比較難，他們常弄不清楚題意。
玲玲	(1) 15＋21＝36 (2) 15－21＝6 (3) 21－15＝6 (4) 15＋6＝21 答 21 朵	a 沒有思考看見兩個數就加起來 a 紅花比白花少多少，紅花在前面就用 15－21 a 會思考，知道比較是用大數減小數。 a 會思考但認為答案在最後，所以寫 21 困難的理由： (1) 基準量比較大。 (2) 數量小的先出現在題目上。 (3) 兒童在思考「少幾朵」的問題比較不容易，「多多少」比較能思考。
蓉蓉	(1)  (2)  (3)  (4) 15＋21＝36 (5) 15＋（6）＝21 (6) 21－（6）＝15 (7) 15－21＝（6） (8) 21－15＝（6）	a 比較的題目屬於較高層次。 a 誰比誰多比較容易，誰比誰少較難理解，因為和算是的順序無法對應，用手指可以算出來，寫算式會有困擾。 a 題意敘述上，少的在前面，多的在後面與題目「紅花比白花少」不容易對應。 a 若數字大的在前面出現，思路會順暢些。
素素	(1) 21－15＝（6） (2) 15－21＝（6） (4) (3) 15＋（6）＝21	比較型比少的難度較高，學生理解能力欠缺，難易決定於是否有圖解幫助解題。

表二 教師對學生之加減法問題瞭解（續）

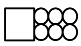
林碧珍（2000）：一個以學童數學認知為基礎的小學教師數學專業發展模式。八十八學年度師範院校教育學術論文集，(pp.1-34)，國立台北師範學院

問題二：（1）小華有 8 顆彈珠，給了小明 5 顆後，小華剩下幾顆彈珠？ （2）小華有 8 顆彈珠，小明有 5 顆彈珠，小華比小明多幾顆？ （3）小華有 8 顆彈珠，小明有 5 顆彈珠，小明比小華少幾顆？ （4）小華有 5 顆彈珠，小明再給他幾顆後，小華就有 8 顆彈珠？ 您認為這四個問題呈現給學生時，順序應為何？為什麼？		
【前測】	呈現給學生的順序	理由
惠惠	（1）→（2）→（3）→（4）	（1）（2）最普通又最直接 （3）（4）說明了還不一定懂
玲玲	（2）→（3）→（1）→（4）	孩子對誰多誰少較敏感，而（2）為正向思考，（3）為逆向思考。（1）（4）為數的分與合，（4）比（1）較複雜
蓉蓉	（1）→（2）→（3）→（4）	（1） 是順向思考 （2）「比大小」為較高層次，不易知道誰是基準 （3）是「比大小」問題又是逆向思考 （4）高層次
素素	（1）→（2）→（3）→（4）	依易→難
【後測】	呈現給學生的順序	理由
惠惠	（1）→（4）→（2）→（3）	（1）是拿走型，對孩子來說最容易。 （4）是添加型。 （2）（3）同屬於比較型，但比多比較容易直接就可以做，比少就用累加，比較困難。
玲玲	（1）→（2）→（3）→（4）	（1）是拿走型最容易。 （2）（3）雖同為比較型，但（2）問多多少，直接 8 和 5 比大小，差即為答案。而（3）問的是少幾顆，問法不同但算法相同，學生會有些猶豫。 （4）的改變量未知，但學童看題意「再給」很容易直接把 5 和 8 加起來，而沒有仔細思考。
蓉蓉	（1）→（2）→（3）→（4）	（1）是拿走型的「結果未知」題型，對孩子來說最容易。 （2）為比較型的題目屬於較高層次，但「誰比誰多」較容易，題目的敘述直接又明瞭，可對應「減法算式」直接順寫著 8－5＝3。 （3）為比較型的「差量未知」類型，「誰比誰少」的題目較難，因為問題和前面的敘述前後不一致，不易對應，和「減法算式」也不好對應。 （4）屬於改變類追加型的「改變量未知題型」，學生若用往上屬的思考會容易些，5＋（）＝8。
素素	（1）→（4）→（2）→（3）	操作難易及理解程度差別所致。

同樣地，在表二之問題二，當教師們比較（1）拿走型之差數未知（2）比多問題之差數未知（3）比少問題之差數未知（4）添加型之加數未知的四種類型的題目時，成員們在加入成長團體後，能很容易地區分哪一問題是屬於哪一類型。例如惠惠、玲玲、蓉蓉老師能辨認出「小華有 8 顆彈珠，給了小明 5 顆後，小華剩下幾顆彈珠？」和「小華有 8 顆彈珠，小明有 5 顆彈珠，小明比小華少幾顆？」均為【比較型】，他們也能說明為什麼「比多」問題比「比少」問題對一年級學童較為容易。惠惠老師的

解釋是：”「比多」比較容易直接做，「比少」就用累加，比較困難。” 玲玲老師的解釋是”「比少」問題是問少幾顆，問法不同但算法相同，學生會有些猶豫。” 蓉蓉老師則認為：「誰比誰多」較容易，題目的敘述直接又明瞭，可以直接對應到減法算式8－5＝3。而「誰比誰少」的題目較難，因為題目的敘述不易對應到「減法算式」。蓉蓉和玲玲老師能辨認出「小華有 5 顆彈珠，小明再給他幾顆後，小華就有 8 顆彈珠？」是屬於【添加型】的「改變量未知」，他們認為學童看到題目中「再給」很容易使用往上數的策略，而將式子寫為 5＋（　）＝8，但不是 8－5＝（　）。所以他們認為這些題目對學童而言由易而難的順序為（1）→（2）→（3）→（4）。

協同成長團體如何增進教師之學童解加減法文字題瞭解的認知呢？研究者從參與教師之現場教學的觀察中，意圖從教師在課堂中所佈的題目類型提出於成長團體的討論會上討論。在十一月初素素老師的一次教學，是成長團體第一次進行的教室觀察，素素老師這節課的目標是用具體物解決合成分解問題，在檢討會上蓉蓉老師認為素素老師一節課佈了六個問題，似嫌過多而使教學無法作深入的探討。素素老師由於蓉蓉的提出，始知覺到自己一節課的教學佈了太多的問題；在討論會上所有教師們尚未知覺到這些題目的差異性及難易度在教學過程的重要性。例如在討論會上，蓉蓉老師說她很喜歡素素老師所佈的題目 1，請小朋友先數出 10 個磁鐵貼在黑板上，然後遮住了一些，如下：

題目 1：黑板上有 10 個磁鐵，老師遮住了一些，如  ，請問老師遮住了多少個磁鐵？

題目 2：操場上有 6 個球，被小明拿走了 2 個，還剩下幾個球？

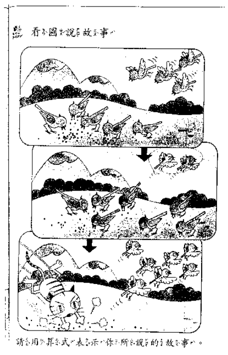
題目 3：有 8 個小朋友溜滑梯，3 個小朋友盪鞦韆，哪邊人多？多多少？

當教師們被要求去比較題目 1 和題目 2, 3 的難易度時，惠惠老師仍然同意素素老師的佈題順序，她所持的理由是題目 1 和前面才剛教過的【分與合】單元在概念上是一樣的，對孩子的學習不會太難。研究者則提出相反的觀點以促使教師們去深思，【分與合】單元所涉及的 8 個花片分成二堆，其中的一堆是 6 個，則另一堆為 2 個，孩子操作的過程中在視覺上是可以看到兩堆的數量；然而，在題目 1 只看到一堆磁鐵的數量 6 個，去思考 10 個磁要遮住幾個才會變成 6 個，這樣的佈題方式相當於減數未知的【拿走型】問題，故題目 1 比題目 2 和題目 3 困難了許多。

另外，在十二月中旬，在玲玲老師以減法列式解【比較型】問題的教學中，佈了

一個問題是「老師買了 5 隻聖誕襪，要送給 8 個小朋友，襪子夠不夠？您怎麼知道？」玲玲老師已具有學童之「「夠不夠分」小朋友可能不知道基準量要用哪一個」的認知，如果還要再買 3 隻襪子，有的小朋友會說多 3 個人。從孩子的學習觀點，玲玲認為【比較型】中的問話，「還少幾頂」與「夠不夠分」的不同敘述對孩子的解題會有所不同。

十二月下旬，在觀察素素老師依據圖片情境列出減法算式的教學中，課本（康軒文化，民 87）中有三幅連環圖片，如右圖。第一幅是描述地上有 5 隻小鳥又飛來了 4 隻小鳥的情境圖片；第二幅圖片是 9 隻小鳥中的 2 隻小鳥飛走了；第 3 幅圖片是描述 7 隻小鳥全部飛走了。



圖一

圖二

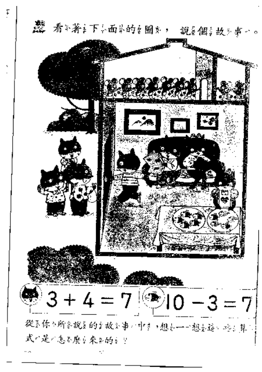
圖三

我們觀察到學生將第二幅的圖片列式為 7－2＝5 而非 9－2＝7，將第三幅圖片列式為 7－0＝7 而非 7－7＝0。成長團體成員認為雖然圖片意圖去表達【拿走型】的問題情境，但由於【拿走型】問題的語意含有動作的行為，當表現在圖片上時所呈現的情境卻成為靜態的，故孩子從圖片上易將在地上的小鳥和飛走的小鳥作為兩數量的大小【比較】問題記錄成 7－2＝5，不是寫成 9－2＝7。同樣的，雖然在第三幅圖片要傳達的是【拿走型】的情境，然而所呈現的圖片卻成為靜態的，易使學生誤將情境描述為沒有小鳥在地上，有 7 隻小鳥在空中，而作兩群小鳥的數量比較。成員們討論學生對圖二和圖三比圖一困難的理由，最後所達成的共識是：【添加型】或【拿走型】問題本身的結構具有動態性的，不適合以靜態的圖片方式呈現；只有【併加型】問題比較適合於以圖片情境呈現，【添加型】或【拿走型】問題則以文字題敘述比圖片呈現較為合適；或者教師教學時實際模擬圖片轉換為動態的情境。

（九）一年級兒童認為 4＋3＝7 和 3＋4＝7 一樣嗎？

從現象學的觀點，可以用來描述 4＋3＝7 的「小華有 4 顆彈珠，小明給小華 3 顆，小華現在有多少顆彈珠？」與用來描述 3＋4＝7 的「小華有 3 顆彈珠，小明給小華 4 顆殊，小華現在有多少顆彈珠？」，這兩個問題情境所描述的是不同的兩個現象。前者是「小華有 4 顆彈珠，小明給他 3 顆」是不同於後者的「小華有 3 顆彈珠，小明給他 4 顆」。然而教師們經常因為兩個問題的「總和」是一樣而承認 4＋3＝7 和 3

＋4＝7 是一樣。在我們的成長團體中，我們發現惠惠老師即有此認知，下面即是一個例子，在她的一次教學中，讓學生看圖片說故事，如右圖，並能用加法算式描述圖片中小貓咪的數量。



兒童對於圖片中有關貓咪的故事所描述的情境為「家裡本有 4 隻小貓咪，後來又來了 3 隻小貓咪，現在共有多少隻小貓咪？」學生被要求去回答「3＋4＝7」是否可以用來表示「家裡本來有 4 隻小貓咪，又來了 3 隻小貓咪，現在有 7 隻小貓咪」時，宜軒兒童認為「3＋4＝7」不可以表示「家裡本來有 4 隻小貓咪，又來了 3 隻貓咪，現在有 7 隻小貓咪」。他的解釋是：因為圖片中的家裡面不是 3 隻小貓咪，而是 4 隻貓咪。惠惠老師本來的認知是「3＋4＝7」和「4＋3＝7」都可以描述「家裡本來有 4 隻小貓咪，又來了 3 隻貓咪，現在有 7 隻小貓咪」，故在她的教學中，當宜軒說明理由之後，惠惠立刻再提供另一個情境以矯正她原先認為宜軒不合理的想法，她用來矯正宜軒的情境改變為「一個學生站在台上，4 個站在台下，現在共有 5 個人」以 1＋4＝5 表示；她再以「4 個小朋友站在台上，1 個站在台下，現在共有 5 個人」表示成 4＋1＝5。惠惠老師說：「事實上，5 個人沒有變，只是先說哪一個，後說哪一個，只是順序不同而已」。

由這則教學案例，我們發現惠惠老師原先的認知是起源於「由總數相同判斷兩個算式是一樣」，再者，她並沒有知覺到她用來修正宜軒想法的例子的情境類型是與宜軒所描述的情境在語意結構上是不同的。「4 個小朋友站在台上，1 個站在台下，現在共有 5 個人」是一個併加型的問題（De Corte & Verschaffel,1991），它的特徵是兩個量一次同時出現在問題中，然而惠惠的學生所描述的問題情境「家裡本來有 4 隻小貓咪，又來了 3 隻貓咪，現在有 7 隻小貓咪」是屬於添加型問題，它的特徵是有一個起始量（4 隻小貓咪），和一個在不同時間出現的改變量（3 隻小貓咪）。

從問題情境中所描述的現象，僅有在併加型的情境，算式 4＋3＝7 和 3＋4＝7 才能視為一樣。依據問題的語意結構（Riley, et al., 1983），例如：「小華有 4 顆彈珠，小明有 3 顆彈珠，兩人共有多少顆彈珠？」4＋3＝7 和 3＋4＝7 僅是策略使用上的區分而已，並不是問題敘述所描述現象的不同。

同樣的，在乘法問題中，「一個盤子有 4 顆蘋果，3 個盤子共有多少顆蘋果？」

的算式表示為 4×3＝12，與「一個盤子有 3 顆蘋果，4 個盤子共有多少顆蘋果？」的算式表示為 3×4＝12，此時的 3×4＝12 和 4×3＝12 仍然不能視為一樣，因為它們代表的問題情境所描述的現象不同。只有在當問題的情境是一個陣列問題，可以將 4×3＝12 和 3×4＝12 是一樣，兩者的差異只在於觀看此陣列的位置不同而已，但所描述的都是同一個現象。

四、結論

協同數學成長團體的討論會, 使我更加的確認使用八十二年課程之教師去區分具體活動與表徵活動的必要性及重要性，教師們加入數學成長團體之後，不再將孩童算式的提早出現完全歸因於家長的提早教學，他們承認「分段佈題」確實能避免孩子算式的提早出現；另一方面，「分段佈題」可以加強孩子的具體活動。從成長團體討論會中, 我們釐清了一些教學上原先沒有知覺到是教學上的問題但的確是教學上的問題。諸如：孩子用○○○○○○－○○＝○○○○如同 6－2＝4 是用來表示「6 個小朋友在操場上溜滑梯，其中有 2 個小朋友走進教室，現在有多少個小朋友還在操楊上玩溜滑梯？」的一種算式記錄。○○○○○○－○○＝○○○○並非表示兒童解題過程的記錄，○○○○○○才是記錄問題情境的解題過程。

對一年級而言，等號「＝」的意義是「變成」「得到」，他們所瞭解的是單純地由等號左邊的兩個數量運作後而得到右邊數量的結果，一年級兒童無法透過像「蹺蹺板」的概念來瞭解等號「＝」的意義，因為等號像「蹺蹺板」涉及到較為複雜的等價關係概念。同樣地，在序列性合成運思期的兒童，在解決兩步驟的合成分解問題時，如：「遊園車上有 5 個人，到了獅子園上來了 2 人，到了河馬站下去了 3 個人，現在車上有多少人？」很容易依實際操作的過程依加入和移去的先後順序而得到最後的結果，依其表徵活動記錄為 5＋2－3＝4。在累進性合成運思期的兒童，先決定到了獅子園站時車上的人數，而記錄為 5＋2＝7，再將數量（7）作為後面敘述的起始量，而得到 7－3＝4。「分段佈題」或「用圖示表示各階段的解題過程」是成長團體的教師們提出用來避免孩子以 5＋2＝7－4＝3 記錄兩步驟的教學策略。

另外, 各類型的合成分解問題的語意結構分析有助於教師在佈題時呈現問題先後順序的選擇，問題情境的語意結構分析有助於教師瞭解兒童的學習，例如：一年級兒

童並不同意 3＋4＝7 可以表示「家裡本來有 4 隻小貓咪，又來了 3 隻小貓咪，現在有 7 隻小貓咪」，一年級兒童並不同意在添加型的情境可以用 3＋4＝7 和 4＋3＝7 表示；然而，在併加型的情境，一年級兒童可以同時接受 3＋4＝7 和 4＋3＝7 可以用來表示「教室內有 4 個男生和 3 個女生，教室內共有 7 個人」。

參與協同成長團體的教師，除了自覺能力的提昇外，也對學生有更多的瞭解。由於她們對學生有更多更深入的瞭解，使得她們更有能力去批判他們所使用的數學教材，例如，學生能口述三幅連環圖片的故事，然而當他們被要求記錄每一幅圖片的算式時，卻發生困難。此困難不是在於算式的不瞭解，而是來自於教材的圖片呈現方式，如本文第 23 頁圖片二，孩子能口述「地上有 9 隻小鳥，飛走了 2 隻，現在地上有幾隻小鳥？」是一個【拿走型】的問題，從問題的語意結構分析，是具有拿走的動態敘述；然而，呈現在圖片上的情境極易解讀為一個靜態的【比較型】問題，而將原問題改為「地上有 7 隻小鳥，在空中飛行的小鳥有 2 隻，地上的小鳥比在空中飛行的小鳥多了幾隻？」

五、研究者自我的省思

在這個數學成長團體討論會上，我們每一個人都是學習者，尤其是扮演研究者角色的我，教師在教室現場的教學和在現場所觀察的學生學習狀況，是我在成長團體中學習的主要材料，由於這樣的機會，讓我隨時在理論與實務間作調整修正。在觀察教師實踐教學的過程中，當理論與實務間產生衝突時，一個可能的原因是教師無法掌握該理論的真義，例如：在觀察素素老師第一次教學中，我們發現學生無法深入思考及討論老師一節課裡所佈的六個合成分解問題，由於她不當的小組「分工」而阻礙了小組內學生互動的機會。另外，蓉蓉老師缺乏對兒童的認知，以「蹺蹺板」解釋等號的意義；惠惠老師以成人抽象的數學思維觀點而誤以為 3＋4＝7 和 4＋3＝7 在任何問題情境對一年級學童都一樣。同樣地，在觀察兒童實際的學習狀況，當理論與實務間產生衝突時，我也做了原先持有的理論的修正。例如，對一年級兒童而言，「＝」的意義不是等價關係；若要幫助一年級的兒童瞭解 3＋4＝7 和 4＋3＝7 一樣，併加型的問題情境是一個最適當的類型。協同成長團體的討論會確實能幫助教師解決教學實踐的問題，這些問題也成為我在從事在職教育豐富的題材，吸引老師們的地方。

林碧珍（2000）：一個以學童數學認知為基礎的小學教師數學專業發展模式。八十八學年度師範院校教育學術論文集，(pp.1-34)，國立台北師範學院

雖然在數學成長團體剛成立時，教師們會有交不出作業，擔心討論時講不出內容，教學要被觀察的壓力。我們每週聚會一次，雖然大家要額外挪出半天的時間，一路走了下來，雖然是很辛苦，但是我們每個人都覺得很充實，因為我們每個人都覺得自己成長了很多。我們一次次地修正我們的討論會，我們共同建立了屬於適合於我們每一個人成長的成長團體討論會。在成長團體討論會上，我們每一個人都有一種很棒的感覺，那就是「為什麼我都不會認為它是問題的問題，但它確是教學上的問題」，我們重新擴張我們的心境和視野去關心每一位成員所表達的意見。

1、 有關「以學校為中心的數學專業發展模式」詳細的描述請詳見林碧珍和蔡文煥的論文，發表於1999「數學教師教育」國際學術研討會中文版。國立台灣師範大學。

2、 本研究感謝國科會八十七學年度專題計畫經費補助（NSC88-2511-S134-002），本論文呈現此計畫的部份成果；並感謝新竹市頂埔國小陳建德校長及許佩玲教務主任和參與成長團體之教師們的協助與支持，使得本研究能順利完成；更要感謝新竹市教育局在行政方面的支援，更使得數學成長團體的教師們熱心的參與本研究。

六、參考書目

中文部分

呂玉琴（民 86）：國小低年級學生對加減法文字題的了解，發表於中華民國第十三屆科學教育學術研討會會議手冊及短篇論文彙編（355-361）。中華民國科學教育學會及國立台灣師範大學科學教育研究所。

林碧珍、蔡文煥（民 88）：以學校為中心的小學教師數學專業發展模式，發表於 1999「數學教師教育」國際學術研討會。國立台灣師範大學。

陳惠邦（民 87）：教育行動研究。台北市：師大師苑。

康軒文化（民 87）：國民小學數學指引第一冊（教育部審定本）。台北:康軒文化。

教育部（民 82）：國民小學課程標準。台北市：台捷。

國立編譯館（民 85）：國民小學數學課本第一冊（教育部審定本）。台北：國立編譯館。

甯自強（民 82a）：國小數學科新課程的精神及改革動向－由根本建構主義的觀點來看。科學教育學刊, 1 (1) ,101-108.

甯自強（民 82b）：兩步驟的問題。教師之友， 第 34 卷第 2 期。 嘉義師範學院。

漢菊德、陳正乾譯（民 85）：兒童心智。譯自 M. Donaldson（1978）. Children’s Minds

林碧珍（2000）：一個以學童數學認知為基礎的小學教師數學專業發展模式。八十八學年度師範院校教育學術論文集，(pp.1-34)，國立台北師範學院

。遠流出版社。

饒見維（民 85）：教師專業發展－理論與實際。台北：五南。

蔣治邦（民 83）：由表徵觀點探討新教材數與計算活動的設計。國民小學數學科新課程概說－低年級（60-76）。台北台灣省國民學校教師研習會。

蕭昭君（民 87）：我國小學數學教育改革的推廣研究－人在改革現場的定位與意義。國立花蓮師範學院初等教育學系論文發表會。

英文部分

Bruner, J. S.（1966）. Toward a Theory of Instruction. Cambridge, MA: Harvard University.

Carpenter, T. P.（1985）. Learning to add and subtract: An exercise in problem solving. In E. A. Silver（Ed.）.Teaching and Learning Mathematics Problem Solving: Multiple Research Perspectives (pp.17-40). Hillsdale, NJ: Lawarence Erlbaum.

Carpenter, T. P. & Moser, J. M.（1984）. The acquisition of addition and subtraction concepts in grade one through three. Journal for Research in Mathematics Education, 15, 179-202.

Cohen, L. & Manion, L. (1984). Action Research. In Bell, et al. (Eds.), Conducting Small-Scale Investigations in Educational Management. London: Open University.

De Corte, E., Verschaffel, L.,（1991）. Some factors influencing the solution of addition and subtraction word problems. In K. Durkin and B. Shrie（Eds.）. Language in Mathematical Education (pp.117-130). London: Open University.

Elliott, J. (1993). Professional development in a land of choice and diversity: the future challenge of action research. In D. Bridges & T. Kerry (Eds.) Developing Teachers Professionally, 23-50. London: Routledge.

Lesh, R. (1979). Mathematical learning disabilities: consideration for identification, diagnosis, and remediation. In R. Lesh, D. Mierkiewicz, & M. G. Kantowsk（Eds.）, Applied Mathematical Problem Solving. Columbus, OH: ERIC/SMEAC.

Lewis, A., & Mayer, R.（1987）. Students' miscomprehension of relational statements in arithmetic word problems. Journal of Educational Psychology ,79, 363-371.

Lin, P. (1997). Children's Cognitive Processes in Solving Two-step Compare Word Problems. Unpublished dissertation, University of Minnesota.

Patterson, J. L. & Czajkowski, T. J.（1979） Implementation: Neglected phase in curriculum change, Educational Leadership, 37（3）, 204－206.

Riley, M. S.（1981）. Conceptual and Procedural Knowledge in Development. Unpublished master's thesis, University of Pittsburgh.

Riley, M. S., Greeno, J. G., & Heller, J. I.（1983）. Development of children's problem solving ability in arithmetic. In H. P. Ginsberg（Eds.）. The Development of

Mathematical Thinking (pp.153-196). San Diego, CA: Academic Press.
Verschaffel, L., De Corte, E., & Pauwels, A.（1992）. Solving compare problems: An eye-movement test of Lewis and Mayer’s consistency hypothesis. Journal of Educational Psychology, 84, 85-94.
Verschaffel, L.（1994）. Using retelling data to study elementary school children’s representations and solutions of compare problems. Journal for Research in Mathematics Education, 25, 141-166.
Webb, R, (1990). Practitioner Research in the Primary school, London: Falmer.
Willis, G. B., & Fuson, K. C.（1988）. Teaching children to use schematic drawing to solve addition and subtraction word problems. Journal of Educational Psychology, 80 192-201.

林碧珍（2000）：一個以學童數學認知為基礎的小學教師數學專業發展模式。八十八學年度師範院校教育學術論文集，(pp.1-34)，國立台北師範學院

A MODEL OF PROFESSIONAL DEVELOPMENT FOR ELEMENTARY TEACHERS BASED ON CHILDREN'S COGNITION OF MATHEAMTICS

Pi-Jen Lin
Department of Mathematics and Science Education
Hsin-Chu Teachers College

ABSTRACT

The study was to construct a model of school-centered professional development for elementary mathematics teachers. The purpose of the professional development was to help teachers become more aware of children's learning and become more reflective on their mathematics classroom practice. The study taking collaborative action research as an approach set up a co-development group in Ding-Pu elementary school of Shin-Chu city. The major participants of the co-development group are the researcher and six teachers of Ding-Pu elementary school. The regular weekly meeting of the co-development group is the place in which we initiated, discussed and resolved the issues of mathematics teaching. It is also the time that we shared our various experience and knowledge with others. The paper describes that the cognitive activities we engaged in a professional development project and the issues relevant with children's cognition we addressed in the discussions of the team. The theories underpinning the issues resolved are illustrated. The issues that we addressed in the team included: the distinctions among concrete activity, representation, and mathematical expression; grouping; mathematical expression used followed by representation, teaching strategies in order to avoid the use of 5＋2＝7－3＝4 expressed two-step word problems. Teachers have better understanding of children's learning; for instance, 4＋3＝7 is not identical with 3＋4＝7 for first graders.

Key words: Professional development Collaborative action research
Co-development group