

創新數學教學之一：從真實情境探究數學

林碧珍 國立新竹教育大學應用數學系

近幾年來，創新教學或精進教學對教育工作人員，應當不是陌生的語詞。創新教學是重新開發設計具創意又新穎的教學方法或教學活動，而精進教學是在教學方法或在教學活動內容上，在既有的基礎上，往上提昇更高的教學品質；在意義上或作法上兩者有些微的不同，但其共同的目標都是邁向更高的教學品質。

一、生活數學化、數學生活化

創新數學教學的作法相當多元，諸如：有些教師從教學方法上力求創新，有些教師開發獨創的教具或結合網路資源，有些教師從教學設計上力求突破，如從教學活動設計上結合學生的生活經驗，或與其他領域結合的統整課程。這次兩件創新數學教學作品，都是運用學生周遭的環境與生活經驗，作為教學活動設計的背景。結合學生的生活經驗或周遭的環境事物，不僅可以引起學生的學習動機與興趣，而且可以讓學生察覺到存在周遭事物中的數學，以培養學生對數學的敏感度，這樣的理念正是符合九年一貫數學學習領域的連結主題的目標。

當詳細審視九年一貫課程暫行綱要的能力指標內容（教育部，2001），我們發現在小學階段數學各主題的能力指標很強調從生活情境出發；為了因應課程改革的需要，教科書的教材設計或教師的教學設計也嘗試將生活情境融入於教學中。同樣地，近年來參與創新教學比賽的作品，在教學活動設計上也大多朝向與學生的生活情境相結合，這次的兩件作品即是。

雖然這兩件教學作品都嘗試與學生的生活情境相結合，但是兩件作品對情境在數學學習意義上不盡相同，第一件作品名稱「方盒、圓罐、球」，是以課本的教學目標為前提，結合學生感興趣的新青蛙王子的童話故事，透過生活周遭的立體形體讓學生翻滾、分類、觸摸以瞭解各種不同形體的特性，並讓學生從生活周遭事物中認識並找出各種形狀，這樣的教學設計，生活情境是用來襯托數學的平易性，並豐富教學活動的活潑性、趣味性、及應用性。所以，「方盒、圓罐、球」作品之生活情境對數學學習所賦予的意義是「數學生活化」，藉由生活情境讓數學更平易近人。

第二件作品名稱「嘉義酒廠」，教學活動是以嘉義酒廠的情境脈絡為主軸，幫助學生從酒廠的情境脈絡中察覺數學並轉化為數學問題，所以由情境脈絡所察覺並轉化的教學目標所涵蓋的數學主題不僅是統計圖表，也可能是數量關係或百分數，所以本教學活動的教學目標，是源自於情境脈絡所隱含的數學所發展出來的，故並不受課本的教學目標所束縛。是故，「嘉義酒廠」作品之真實生活情境對數學學習所賦予的意義是「生活數學化」，以學生生活周遭的環境為出發點，讓學生多去關注並體察周遭看似平凡的事物，發現這些事物隱藏著規律性的變化規則，從中發掘出數學的奧秘。「生活數學化」的生活情境本身即蘊藏了數學的意義，學生從探究過程中，可以揭露隱藏在嘉義酒廠背後的數學意義，也就是說，

我們周遭的所有事物，其實蘊含著某些規律性存在著，數學就是以科學方法找出這些蘊藏在生活中的規律性，例如：酒廠文物館的設計、酒類商標的設計、釀酒的過程…等等。

二、從真實情境學習數學的理論基礎

為何教學以真實情境為出發點有助於數學學習？以下將從 Vergnaud 的概念體的觀點、情境學習理論觀點、及荷蘭的真實數學教育作為真實情境對數學學習的學理基礎。情境學習理論強調學習的情境脈絡；而 RME 的情境強調真實程度。

Vergnaud (1983)的概念體 $C = (S, I, R)$ ，提出情境對形成數學概念所扮演的角色，將一組情境 (S) 是建立概念 (C) 的一個向度，I 是從一組情境中抽離出其不變性，然後再用符號表徵 (R) 其不變性，情境是建立數學概念不可缺的重要元素，但是並不特別去強調情境的真實性與否。

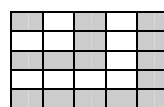
從情境學習理論觀點，人類的活動與社會情境是分不開的，知識是學習者與情境互動的產物，知識的建立是不能與社會情境脈絡分割或相脫離；知識是學習者在真實活動中透過主動探究與摸索的過程而獲得的 (Brown, Collins, Duguid, 1989)。情境學習理論強調人類從事的活動無法去情境化，這樣的主張也和荷蘭的真實數學教育 (realistic mathematics education，簡稱 RME) 的理念一致。

RME 將數學視為是人類的活動，是從做數學中而獲得的 (Freudenthal, 1971)。RME 主張數學是人類的解題、尋求問題的活動和組織材料的活動，所以，數學是幫助學習者與周遭環境產生意義的一種工具，而真實情境是學習數學的起始點。RME 主張一個數學題目是否能促進學生進行數學化的思考，在於其真實的程度。一個情境是否真實，對解題者而言，是一種相對性的觀點，完全決定於每一個人的生活經驗，因為某一個情境，對某一個人而言是真實的，但對於其他人，可能這個情境就不是真實的。情境在於幫助學生利用自己的經驗和知識，進行數學化的思考。情境若能與學生的真實生活越貼近，越有利於學生進行數學化的思考，數學學習越有效。

三、情境的真實程度

在探討情境的真實程度之前，需要先釐清何謂情境？有關問題情境的研究，不同的學者有不同的定義。從研究學生解題的觀點，問題情境是數學題目的題幹上所描述的情境脈絡，例如：「運動會大會舞的表演人數大約在 50~75 人之間，只知道 7 個人排成一排，剛好排完，大會舞表演人數可能有多少人？」在此，數學問題所描述的情境是運動會的表演人數。從數學教學的觀點，廣義的教學情境涵蓋範圍由教師、學生、學習材料或師生的對話內容等整個學習環境。以第二件作品「嘉義酒廠」所涉及的情境脈絡就是釀酒工廠、酒類文物館、陳列的酒類商品，這些情境脈絡不是為了包裝所要教的統計圖表，而是嘉義酒廠的情境脈絡可以如何來發展學生的統計圖表概念；也就是以酒廠的情境脈絡可以探索哪些數學概念。

De Lange 從情境的真實程度將數學题目的情境分為三類(Gravemeijer, 1994)：第一類是裸題，沒有文字描述的情境，只有算式，例如：「請算出 $45+55=()$ 中 $()$ 的數字是多少？」。第二類是虛擬情境，情境是為教某一個數學概念而加以包裝而已，题目的情境無助於數學概念的探究與思考。例如：「媽媽告訴小杰煮飯時，2杯米配4杯水煮出來的飯最Q最好吃，今天媽媽要小杰用6杯米煮飯，需要加多少杯水？」，這個問題本身涉及的情境，是人為用來包裝而已，第二類是教科書或教師教學中出現最多的類型，例如，第二件作品「嘉義酒廠」的第37頁的五個數學問題屬於這個類型，酒廠的情境僅是用來包裝所要解決的數的加減乘除而已。第三種類型的情境是從情境本身就蘊含著相關重要的訊息，學習者從情境的探索中可以獲得新的數學概念，例如：當老師要學生算出 $1+3+5+7+\dots+99=()$ 時，學生思考了許久，仍然無法成功的解題，此時若教師能提供如圖形所示，此正方形圖的灰色區域與白色區域所代表的格子數分別為1, 3, 5, 7, 9，這些數字的總和正好是此圖形的方格子總數，也就是此大正方形的面積，因而得到 $1+3+5+7+9=5^2$ ，由此可類推到 $1+3+5+7+\dots+99=50^2$ 。這個例子所提供的情境，是一個非文字的圖形情境，它有助於學習者進行數學化的思考。



雖然教師在設計教學活動時，開始關注到與學生的真實生活情境相結合，但是在教學活動的數學布題，在情境上仍然難以避免下面的缺失：(一) 情境是虛擬的而非真實的。(二) 题目的數據失當。(三) 情境的不合理。例如：媽媽到大賣廠購買了7個蛋盒，每個蛋盒都沒有裝雞蛋，請問媽媽共買了幾個雞蛋？(四) 情境沒有需要使用某一特定解題策略的需求。例如：「玩具一個45元，娃娃一個76元，兩種各買4個，需付多少元？用算式填充題把問題記下來，再算出答案。」這個题目是希望孩子透過兩種不同的解法： $45 \times 4 + 76 \times 4 = ()$ 和 $(45 + 76) \times 4 = ()$ ，能瞭解到乘法對加法的分配率。這個問題若將45改為24才能與76合成為100，學生才有需求將 $24 \times 4 + 76 \times 4 = ()$ 合併為 $(24 + 76) \times 4$ 然後求答。

四、從情境中探究數學的意涵

雖然一個情境的真實程度決定於每位學生的個別經驗，但教師在一個班級的教學中，所要尋求的是這群學生共同的生活經驗。教師在教學中若能真正尋找出學生的共同生活經驗，作為教學佈題的素材，則越能幫助學生進行數學化的思考，以達到數學學習的效果。由於教師在學生時代的時候，所學習的數學涉及的情境大多是屬於人為包裝或虛擬的問題情境，對於從隱含著數學概念的生活情境為教學出發點，對教師而言，是一種新的挑戰與考驗。基於此，以下提供「揭開樓梯的神秘面紗」的教學活動範例，從每日需要爬行的樓梯作為教學活動的資源，幫助學生察覺隱含在樓梯背後的數學。

範例：「揭開樓梯的神秘面紗」

樓梯經常被設計為數學步道的景點之一，從樓梯察覺與數學相關的問題，通

常的數學問題是：「您如何求得這個樓梯的高度？它的高度是多少？」，這些大都是與實測相關的問題，但是這樣的數學問題深度不夠。

活動進行前，教師可以事先拍攝各種造型不同的樓梯照片，播放給學生觀察，一方面在於溝通活動需要用到語詞，如跨上地板地面的踏板規定為第一階梯、階梯的深度與高度，樓梯的深度及高度與寬度、樓梯的階數。另一個目的是讓學生對每天爬行的樓梯多給予幾分的關注。進行活動前，教師需先探勘周遭環境的各種樓梯，然後分組測量討論進行。活動進行時，要求學生能精準地量出不同樓梯之各個部分的數據。

【活動步驟】：

- 一、請每一個人實際量量看學校、家裡或餐廳等地的樓梯之每個階梯的深度和高度。
- 二、這個樓梯共有幾階？
- 三、你量的這個樓梯好爬嗎？為什麼？
- 四、請您將量出來的值記錄在學習單上，如下表：

姓名	樓梯位置	階梯形狀	每階高度 (公分)	每階深度 (公分)	樓梯格數	樓梯高度 (公分)	樓梯深度 (公分)	容易爬行
林碧珍	科學館大樓		16	28	11	166.5	211.5	yes

- 五、您要如何才能讓原來的樓梯變的比較陡呢？
- 六、比較陡的樓梯有何優點或缺點呢？
- 七、假若您不小心選到的樓梯是不舒服的樓梯。請您指出五點說明為什麼您會認為它是不舒服的樓梯？
- 八、建築工人為了避免建出不舒服的樓梯，而注意去觀察，發現到好的樓梯的每一階梯的高度和寬度有什麼關係？
- 九、請比較看看，這些不同的樓梯之間，您能觀察到什麼？

從活動紀錄表的數據，讓學生發現：好爬的樓梯，是成人的一個平均步伐長。它的大小剛好是樓梯的兩個階梯的高度和一個階梯深度的總長度。同樣的，高度與深度的比值約為 0.6 左右，是好爬樓梯的陡度。從探究樓梯的過程，我們發現樓梯情境背後蘊藏著數學豐富的資源：一個代數式：2 個階梯的高度 + 一個階梯深度 = 60。

本活動提供讓學生從生活周遭事物中收集資料的機會，再利用表格整理繁瑣的資料，並從資料中尋求並發現其規律性。本活動可以結合情意與認知的學習，情意是指爬樓梯是舒服或不舒服的感覺，爬起來感覺較為舒服的樓梯是因為它的陡度不陡，而陡度就是樓梯的斜度，樓梯的斜度是階梯的高度與深度的比值，同樣的，這個活動也討論了爬起來舒服的樓梯與一個人的步伐長有關。所以，這個活動的特色是將情意性的感覺以透過科學性的探索找出其背後所富有的數學意義。這個活動是從一堆數據中尋求以代數式表示數據之間的關係，它可以將實

林碧珍(2008):創新數學教學之一：從真實情境探究數學。國立台灣科學教育館（主編）。科學教育優質教學示例研討工作坊活動手冊（pp. 32-37）。11月30日。台北市：國立台灣科學教育館。

測、統計表、代數式、數的加減乘除、斜率等概念整合在一起，是作為數學內部連結的一個可參考的範例。

五、參考文獻

教育部（2001）。國民中小學九年一貫課程暫行綱要。台北：教育部。

林碧珍(2003): 數學領域的連結—生活情境中的數學。新竹縣教育研究集刊，第三期，PP. 1-26。新竹教育研究發展暨網路中心。

Brown, J. S., Collins, A., & Duguid, P. (1989). Situated cognition and the culture of learning. *Educational Researcher*, 18, 32-41.

Freudenthal, H. (1971). Geometry between the devil and the deep sea. *Educational Studies in Mathematics*, 3, 413-435.

Romberg, T. A., Allison, J., Clark, B. A., Clark, D. M., Pedro, J. D., & Spence, M. (1991). *A blue-print for mathematics in context: A connected curriculum for grade 5-8*. Madison, WI: Wisconsin Center for Education Research.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. In R. Lesh & M. Landau (Eds.) *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes* (127-174). NY: Academic Press.