

林碧珍 (2000): 數學教學模式的闡釋-教師佈題、學生解題、發表解題、溝通討論。 國教世紀, 第 189 期, pp.23-35. 國立新竹師範學院。

數學教學模式的闡釋
教師佈題 · 學生解題 · 發表解題 · 溝通與討論

林碧珍
數理教育系

一、前言：

自八十七年起，筆者在新竹市頂埔國小組成一個數學成長團體，目的在於協助教師解決數學教室中有關學生學習及數學教學的問題。每週星期一下午是與小學教師圍坐一起共同提出、並討論數學教學問題的時間。由於這個成長團體的成立，筆者始有機會瞭解教師在現場教學中所遭遇的實際問題，始有機會與教師深入暢談數學的學習與教學；由於這個團體的討論會，筆者原先持有的理論始有機會從教師現場教學的實務而得到驗證；同樣的，教師的教學始有機會獲得理論的支援與其合理性的確認。理論得到實務的驗證，實務獲得理論的支撐，建立理論與實物兩者間的連結關係，就是這個數學成長團體的特徵之一。這個數學成長團體幫助了教師從原先認為學生數學學習的困難是歸因於學生的能力或努力的缺乏，逐漸轉而承認部分因素是由於教師自己本身對學生學習認知的知識及教數學知識之不足。教師能有這樣的覺醒，是因為在成長團體中的每位成員都被要求實際走入成員之現場教學做教室觀察；而且，每個成員的教學也同樣的要被觀察。從數學學習的觀點，長久已被教師視為是理所當然但確是數學教學的議題，這些在討論會上被提出的議題正是教師教學的盲點，就是在這些被觀察的數學教學的情境中，透過提出問題、經由討論、辯證、和協商的過程而獲得澄清；因此，教師的教學知識和對學生學習的知識也因此而獲得發展。當成員們之間的討論有歧見發生需要達成共識時，我們所依據的判準是教室現場的學生所發生的學習，而非以筆者是師院教授的權威身份，亦非持以人數較多的小學教師之人多勢眾為由。我們從教室觀察中發現諸多的教學實例，大多數是由於教師們自己對於學生學習認知的瞭解不足及數學教學知識的缺乏而造成學生學習的效果不顯著。從過去的一年，我們從教師的現場教學中蒐集了許多關於數學教學的例子，有關這些

林碧珍 (2000): 數學教學模式的闡釋-教師佈題、學生解題、發表解題、溝通討論。《國教世紀》, 第 189 期, pp.23-35. 國立新竹師範學院。

更多相關的教學實例可以參閱參考書目 1 及參考書目 2; 有關教師在數學成長團體中對數學教學專業知識的改變可以參閱參考書目 3 及參考書目 4。

八十五年審定本的教科書全面展開後, 各縣市已積極推動落實新課程。幾年來的實施, 筆者從參與數學成長團體的教師之教學及多次在輔導區數學教學輔導的經驗中發現: 教師們雖然透過各種途徑去瞭解新課程, 然而對新課程所獲得的認知, 僅是粗淺地瞭解新課程的『建構』精神, 及僅粗略的掌握數學教學的教師佈題、學生解題、學生發表解題過程等基本流程, 教師並沒有真正掌握到每一個流程的實質內涵。

本文的目的在於幫助目前正在使用新課程的現場教學的老師, 提供如何去掌握從教師佈題、學生解題、學生發表解題過程的每一個流程的實質內涵。本文並不說教的方式、也不以條例式提出教師應遵守的原則; 取而代之的, 將提供數學成長團體所觀察到的實際例子來說明每一個教學流程的實質意義。

二、數學教學流程

(一) 教師佈題:

教師們大都瞭解到: 當佈題時應符合學生的生活經驗, 及能引起學生的解題動機, 是佈題的主要原則之一。教師們可能經常在佈題時只考慮到佈題的活潑化但卻忽略了教學目標的掌握。美英老師在 3 月 18 日進行一年級的『以 50 以內的量為起點, 逐次累加十, 建立 100 以內的數詞』為目標的活動時, 她的佈題是:

如果將一條橘色積木當作 10 個阿兵哥

- (1) 現在需要 50 位元阿兵哥打仗, 需要拿幾條橘色積木?
- (2) 有 60 位阿兵哥幫忙搬大石頭, 需要拿幾條橘色積木?
- (3) 有 70 位阿兵哥幫忙搬超級蛋糕, 需要拿幾條橘色積木?
- (4) 有 80 位阿兵哥幫忙搬果汁, 需要拿幾條橘色積木?
- (5) 有 90 位阿兵哥幫忙搬飛機殘骸, 需要拿幾條橘色積木?

美英老師這樣的佈題是在進行『100 以內的數, 以「十為單位」的做數活動』, 而非在達成活動目標以『逐次累十』學習『100 以內的標準數詞序列』。依照孩子

林碧珍 (2000): 數學教學模式的闡釋-教師佈題、學生解題、發表解題、溝通討論。《國教世紀》, 第 189 期, pp.23-35. 國立新竹師範學院。

數概念的發展, 標準數詞序列的建立應需先於說數、讀數、聽數、寫數、做數等數概念的學習。為達成『以 50 以內的量為起點, 逐次累加十, 建立 100 以內的數詞』的目標, 美英老師宜將原題目修改為:

將一條橘色積木當作 10 個阿兵哥, 軍隊現有 50 位阿兵哥

- (1) 還需要 10 位元阿兵哥來幫忙搬大石頭, 搬大石頭的有幾位阿兵哥?
- (2) 還需要 10 位元阿兵哥來幫忙搬超級蛋糕, 搬超級蛋糕的有幾位阿兵哥?
- (3) 還需要 10 位元阿兵哥來幫忙搬運果汁, 搬果汁的有幾位阿兵哥?
- (4) 還需要 10 位元阿兵哥來幫忙搬飛機殘骸, 搬勒肌殘骸的有幾位阿兵哥?
- (5) 還需要 10 位元阿兵哥來幫忙搬家, 搬家的有幾位阿兵哥?

另外, 教師可能在佈題時只考慮到符合學生的生活經驗, 但卻缺乏對數學題目本身特質的瞭解, 它也是造成學生學習的困難的因素之一。例如: 在 10 月 18 日我們觀察美玉老師進行三年級的『解決二位數乘以一位數』的乘法教學時, 她佈了一道題:

『真好喝果汁吧有 12 種口味的果汁, 杯子分大、中、小三種杯子, 請設計一個菜單, 並且, 想想看客人有幾種選擇?』全班學生中只有一位學生能設計出 36 種菜單。除了學生無法明確的想出 12 種果汁名稱是原因之一外, 不同顏色的果汁搭配不同大小的杯子, 共有幾種的配對問題是在乘法的問題中最困難的類型 (Vergnaud, 1983; Greer, 1992; 林碧珍; 1991)。Vergnaud 從度量空間之向度 (dimensions) 的解釋, 配對問題的數學結構是由兩個度量空間的叉積 (cross product) 而產生的第三個度量空間, 它同時涉及到三個度量空間。在此果汁問題中涉及到已知的兩個度量是果汁的口味及杯子的大小, 這二個度量配對後產生的第三個度量是杯子裝著果汁, 其表示方法為序對: (大杯、果汁 1), (大杯、果汁 2), (大杯、果汁 3), ... (大杯、果汁 12); (中杯、果汁 1), (中杯、果汁 2), (中杯、果汁 3), ... (中杯、果汁 12); (小杯、果汁 1) (小杯、果汁 2) (小杯、果汁 3) ... (小杯、果汁 12) 共 36 種。孩子們要能解決此問題必須能看到大杯可以裝有 12 種果汁, 中杯也裝有果汁 12 種的可能, 小杯可以裝有 12 種果汁; 也就是將原來的配對問題『有 12 種口味的果汁, 大、中、小不同的杯子,

林碧珍 (2000): 數學教學模式的闡釋-教師佈題、學生解題、發表解題、溝通討論。《國教世紀》, 第 189 期, pp.23-35. 國立新竹師範學院。

設計成菜單, 客人有幾種選擇?』轉換成多重群 (multiple group) 問題『有大、中、小的杯子, 每一種杯子可以裝有 12 種不同的果汁, 共可裝成幾杯不同口味的果汁?』。配對的問題雖然符合學生的生活經驗, 但它涉及的數學結構較為複雜, 題目本質上是屬於較為困難的類型, 對於初步進入乘法意義學習的三年級學生而言, 會有困難解決這道配對問題是很自然的現象。配對問題不適合出現在三年級的乘法問題, 多重群的問題, 或陣列問題 (array), 才是屬於較適合的類型。

多重群問題: 例如: 『一盒彩色筆有 12 枝, 3 盒共有多少枝彩色筆?』

陣列問題: 例如:

 共有多少人?

(二) 學生解題

目前使用過新課程的教師, 大多數認為低年級兒童不適合採用小組的合作學習, 他們所持的依據是皮亞傑的理論, 低年級兒童尚屬於自我中心時期, 兒童只看到自己, 或只從自己的觀點看待別人。然而羅伊德的實驗指出, 兒童在幼兒階段具有相當能力去幫助貓熊作溝通, 但是當兒童自己本身需要別人的協助時, 由於兒童並沒有被告知所接受到的訊息不完全, 而不知如何表達, 而且兒童通常不會主動地要求更多的資訊 (漢菊德、陳正乾, 1996)。在一次的教室觀察中, 我們看到立民老師給學生進行小組活動是名義上的分組卻未達到合作學習的目的, 立民老師的分組方式是: 四個人為一小組, 一個人負責管秩序, 一個人負責解問題, 一個人負責把答案寫在白板上, 另一個人負責發表解題記錄。我們發現在進行解題過程中, 管秩序的這位學生不允許另外三個人討論, 因為違反了上課中『說話』的規矩。而負責發表在白板上解題記錄的學生, 由於沒有參與討論, 而無法解釋別人的想法, 取而代之的是用自己的解決來說明, 這樣的分組學習當然會造成白板上之思考歷程與解題記錄並非是小組成員協商的共識。

除了分組的不適當外, 教師提供給孩子進行活動需要花片的數量是否充分, 亦是決定合作學習的成功與否的主要因素之一。這樣的情況發生在美芬的一年級

林碧珍 (2000): 數學教學模式的闡釋-教師佈題、學生解題、發表解題、溝通討論。《國教世紀》, 第 189 期, pp.23-35. 國立新竹師範學院。

教學中, 美芬老師要求孩子用花片解決『8 個花片分成兩堆, 可以怎麼分?』她只發給每小組 (4 個人) 8 個花片, 結果是同組的每位孩子都在搶花片, 搶到花片的人, 將花片分兩堆後, 另外一個人又把花片搶過去再分。美芬老師因為這樣不愉快的教學經驗, 對新課程所提倡的小組合作學習, 最後所下的結論是:『立意良多, 實施困難』。依據我們的分析:美芬老師不苟同小組合作學習的理念, 其主要原因是她並未掌握到合作學習的真正精神。如果美芬老師在這個活動中提供給每位學生足夠的花片數量, 讓每位學生從操作的過程中, 除了自己所做出的兩堆數量外, 更有機會從其他三位同學學習到其他的兩堆數量, 可能是 (3 個, 5 個) 或 (4 個, 4 個) 或 (1 個, 7 個) 或 (2 個, 6 個), 而這些不同的分法是自己沒有想到的兩堆數量。這樣從觀察別人的操作中, 學習到 8 個花片分成兩堆的情形不只是自己做出的一種, 如此之學習環境非但不會造成教室常規的困難, 而且從合作學習的過程中促進孩子的多元思考。

分組方式、教具提供的充分性, 是影響學生進行有效的合作學習的因素之外, 活動的任務 (tasks) 是否有小組合作完成需要性? 也是決定合作學習成功與否的主要因素。我們的觀察發現: 教師在課堂上所佈的數學問題, 經常是個人獨自就可以成功解題的。因此為增進學生的合作學習, 教師所提供的題目, 在本質上應以需要小組成員合作始能完成的任務為主要考量。

(三) 學生發表解題過程

在數學成長團體中, 我們發現: 教師經常認為學生在發表自己的解題過程階段, 自己本身扮演的是聆聽者或複誦學生的解題記錄的角色。事實上, 教師在進行這個階段時, 必需超越這個角色, 而去逮住適當的時機, 幫助學生重新反省自己的思考過程或造成學生的認知衝突, 以幫助學生發展至更高層次的認知。例如在 10 月 11 日美姿老師進行二年級的二位數加減教學時, 她的佈題是:『39 顆糖果, 吃了 18 顆, 還剩下幾顆? 請先用算式填充題記錄下來, 再算出答案。』

當學生解題後, 進入發表解題的階段時, 美姿老師在教室巡視中找出學生的不同解題類型有:

林碧珍 (2000): 數學教學模式的闡釋-教師佈題、學生解題、發表解題、溝通討論。《國教世紀》, 第 189 期, pp.23-35. 國立新竹師範學院。

$\begin{aligned} \dot{U} \quad & 39 - 18 = () \\ & 30 - 10 = 20 \\ & 9 - 8 = 1 \\ & 20 + 1 = 21 \end{aligned}$	$\dot{U} \quad \begin{aligned} 39 - 18 &= () \\ 39 - 10 &= 29 \\ 29 - 8 &= 21 \end{aligned}$	$\dot{U} \quad \begin{aligned} 39 - 18 &= () \\ 39 - 10 &= 29 \\ 29 - 8 &= 21 \end{aligned}$
---	---	---

美姿老師更進一步地要求學生去發表自己的解題過程，她所採用的方法是：
請奕宣和偉明兩位學生用橘色的長條方格板和白色的方格板解釋每個式子的意義。

(一) 奕宣在黑板上用條狀的橘色和白色的小方瓦解釋第 \dot{U} 種解法：

奕宣做出 ，先從 拿掉一個 變成 是 $30 - 10 = 20$ ，
再從 拿走 ，剩下 1 個 ，是 $9 - 8 = 1$ ，最後剩下 ，合起來是 21。


(二) 偉明在黑板上用條狀的橘色和白色的小方瓦解釋第 \dot{U} 種解法：

他在黑板上用方瓦做出 ，先拿掉一個 而剩下 ，是解釋
 $39 - 10 = 29$ ，再從 拿走 ，而剩下 ，是說明 $29 - 8 = 21$

美姿以這樣的方式對奕宣和偉明提問，重點是在強調具體物和抽象算式之間的連結，這是六十四年數學課程的精神。然而，八十二年課程所主張的是教師應提供機會讓學生發表自己的解題過程，其目的在於幫助學生重新反省思考自己記錄之意義，培養學生的溝通能力則是另一個目的。因此在請奕宣解釋他的作法時，美姿老師應當提出關鍵性的問話，例如：題目的算式是 $39 - 18 = ()$ ，為什麼您的解題記錄要列為 $30 - 10 = 20$
 $9 - 8 = 1$
 $20 + 1 = 21$ ？接著，再追問：原題目是出現兩個數 39, 18，在您的記錄中 30, 10, 9, 8 是從哪兒來的？他們和 39 或 18 有什麼關係？同樣的，美姿應該以類似問題請偉明解釋他的解題過程。當孩子無法透過橫式來求答案時，橘色和白色小方瓦可能就是求算答案的輔助工具。因此新課程是將具體的教具視為孩子表徵活動的一種形式，算式也是表徵活動的形式之一。

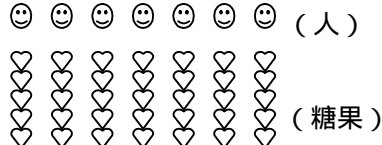
林碧珍 (2000): 數學教學模式的闡釋-教師佈題、學生解題、發表解題、溝通討論。《國教世紀》, 第 189 期, pp.23-35. 國立新竹師範學院。

另外, 在 10 月 11 日我們也觀察了芳芳老師的三年級除法的教學, 此時的除法教學尚未進入除號 (\div) 的引入, 教學目標是『解決總量在 81 以內的除法問題』。下面是學生針對她所佈的等分除問題『有 35 顆糖, 平分給 7 個人, 每人可以得幾顆糖?』的解題類型:

A 

C $35 - 7 = 28$
 $28 - 7 = 21$
 $21 - 7 = 14$
 $14 - 7 = 7$
 $7 - 7 = 0$ (答: 5 顆)

E $7 + 7 = 14$
 $14 + 7 = 21$
 $21 + 7 = 27$
 $28 + 7 = 35$ (答: 5 顆)

E  (人)
(糖果)

當芳芳老師進入學生的解題過程階段時, 芳芳老師也只是請學生將自己如上述的解法重述一遍, 或提問小朋友:「為什麼?」此時, 芳芳應該在學生重述 C 的解法後, 應該進一步的追問學生: 題目中的 35 和 7 分別代表什麼? 那麼 $35 - 7 = 28$ 中的 35 顆糖怎麼可以減掉 7 個人? 如此追問的目的是在於幫助孩子再度去確認「平分給 7 個人」是在第一輪每人分一顆糖 7 個人共分掉 7 顆糖, 這樣的解題過程是在進行將「平分給 7 個人」轉換成「第一輪分掉 7 顆糖」, 因此是 35 顆糖減掉 7 顆糖, 而非是 38 顆糖減掉 7 個人。同樣的, 芳芳老師應當追問 C 解題類型的學生: 從你的減法 (加法) 算式, 如何知道答案是 5?

三、結語

八十二年數學課程強調以學生為本位的數學教學。教師佈題、學生解題、學生發表解題過程 與溝通討論是教師們為達成此目標而被建議採用的基本教學模式。然而, 教師並未真正掌握此教學模式每一個流程的涵義, 僅是粗略的掌握表面的流程, 每一個流程均已在文章中分別提供教學實例具體的指出教師掌握的要點。教師在佈題時, 除了學生的生活經驗、引發學習動機外, 對數學題目在結構上的區分、佈題的方式及內容是否符合教學目標? 更是重要的考慮。除了分組

林碧珍 (2000): 數學教學模式的闡釋-教師佈題、學生解題、發表解題、溝通討論。 國教世紀, 第 189 期, pp.23-35. 國立新竹師範學院。

的形式、教具的充分性外、或動進行的任務是否有小組合力完成的必要？是促進小組合作學習的主要因素。學生發表解題時，不是僅要求學生重述自己的解題記錄的層面而已；重要的是，教師要抓住時機提出關鍵性的問話，幫助學生再次地重新反省有關數學性的思考。然而，我們發現，這些能促使學生進行數學性思考的關鍵性問話，正是象徵著一個好的數學教學的特質，這些就是一位數學教師所必須具備的專業素養。但是，教師需要的有些專業素養，並非教師獨自有能力自覺得到的，而是在數學成長團體討論會透過彼此的經驗分享、觀點的交換、質疑辯證而衍生的。

參考書目

1. 林碧珍、蔡文煥 (1999): 以學校為中心的小學教師數學專業發展模式。論文發表於 1999 數學教師教育國際數學研討會。國立台灣師範大學數學系。
2. 林碧珍 (1999, 審查中): 一個協助教師數學專業發展的師資計畫。 新竹師範學院學報。
3. 林碧珍 (1999, 已接受): 一個以學童數學認知為基礎的小學教師數學專業發展模式。論文將出版於 88 學年度師範院校教育學術論文發表會及論文集。國立臺北師範學院。
4. 林碧珍、蔡文煥、施又齡、廖瓊雯、陳美玲、林美蓉 (1999, 已接受): 一個以學童數學認知為基礎的小學教師數學專業發展模式。論文將出版於 88 學年度師範院校教育學術論文發表會及論文集。國立臺北師範學院。
5. 林碧珍 (1991) 國小兒童對乘除法應用問題之認知結構, 新竹師院學報, 第五期, P.221-288。國立新竹師範學院。
6. Greer, B. (1992). Multiplication and division as models of situations. In D.A. Growus (Ed.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (276-295). NY: MacMillan.
7. Schwartz, J.L. (1988). Intensive Quantity and referent transformation arithmetic operations. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.) *Number Concepts and Operations in the Middle Grade* (41-52). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics. Hills-Dale, NJ: Lawrence Erlbaum.
8. Vergnaud (1983). Multiplicative structures. In R. Lesh & M. Landau (Eds.) *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes* (127-174). NY: Academic Press.

林碧珍 (2000): 數學教學模式的闡釋-教師佈題、學生解題、發表解題、溝通討論。國教世紀, 第 189 期, pp.23-35. 國立新竹師範學院。