

## 教師如何培養學生形成數學問題的能力

林碧珍

數學教育系

### 一、前言

九年一貫課程數學學習領域和八十二年課程目標一樣地重視學生運用數學知識與方法解決問題的能力(教育部, 1993), 而且九年一貫數學學習領域更把發展學生形成數學問題的能力與課程目標解決問題的能力的課程併列在一起(教育部, 2000)。培養學生形成數學問題能力不僅是我國數學課程未來發展的重點之一, 而且是美國數學課程發展所強調的重點之一(NCTM, 1989, 1991, 2000)。將數學視為解題時, 許多數學教育學者或研究者深入探討有關解題方面的研究, 又因為形成數學問題是解題活動的第個步驟時, 在探討有關解題研究的同時, 有許多研究者也將研究的主題放在「形成數學問題」上, 諸如: 有些研究者將研究焦點放在學生形成數學問題方面的研究(Leung & Silver, 1997; Silver & Cai, 1996); 有些研究者則致力於有關教師形成數學問題方面的研究(李嘉珍, 2000; 林文生, 1996; 林碧珍, 2001; 梁淑坤, 1996a; 陶惠昭, 1998; 劉芳妃, 1998; English 1997a, 1997b; Leung, 1997)。除了從數學課程改革的趨勢說明形成數學問題的重要性, 下面將從解題的觀點及學習與教學的觀點探討形成數學問題的重要性。本文將更進一步提供以實務為基礎所研究發展的十二種類型素材, 作為教師培養學生形成數學問題能力的參考。

### 二、「形成數學問題」的意義

數學教育一直存在的普遍性問題是: 當解決算式形式的數學問題時, 學生的成就表現很好, 一旦遇到解決應用問題的形式時, 學生的成就表現就很差。或許提供給學生形成數學問題的機會, 將是解決此一數學教育問題的一線生機。因為依據 Polya(1985) 提出的解題的四個階段中, 理解問題是成功解題的第一階段, 亦即, 理解問題是成功解題的必要條件, 但並非充分條件, 理解問題的過程必需涉及題目中關鍵要素的掌握, 題目的語意及語法結構與其相互之間關係的瞭解,

---

<sup>1</sup> 本文所引用的教學例子或學生的形成問題的真實例子是由筆者在新竹市頂埔國小組成的協同數學成長團體的一群教師所提供的。

林碧珍 (2001): 教師如何培養學生形成數學問題的能力。《國教世紀》, 第 198 期, pp. 5-14. 國立新竹師範學院。

這些過程正是形成數學問題的過程中所必需涉及的認知活動; 因此, 提供給學生形成數學問題的機會, 應當有助於理解問題能力的提昇, 也因此具有提升學生數學解題能力的可能性 (Silver & Cai, 1996)。

國內有關形成數學問題的數學教育研究, 有些研究者以「擬題」稱之 (梁淑坤, 1994)。形成數學問題者可以在有提供素材或訊息之下形成數學問題, 也可以在沒有提供素材下進行; 形成數學問題者可能是學生, 也可能是教師; 無論如何, 形成數學問題必需要滿足兩個條件: (一) 這個問題必需涉及到數學相關的知識, (二) 它必需符合構成一個問題的條件。有些教師在教學中隨時在進行「形成數學問題」的工作, 例如: 依據該節課的教學目標, 教師自行形成一個數學題目, 然後要求學生進行解題, 在這種情況之下, 我們常稱之為教師進行「教學佈題」(林文生, 1996; 陶惠昭, 1998), 這時教師所形成的數學佈題所依據的素材是教學目標, 例如: 當學生被教師要求依據「裝水的保特瓶」設計出一個數學問題時, 「保特瓶」就是形成數學問題的素材。

人在日常生活中, 常遭遇到許多的問題, 並希望尋找出問題的答案。到底什麼才稱為一個問題 (problem)? 依據韋氏大辭典的二個定義 (Webster's, 1979, P.1434): (一) 任何需要被解決的; (二) 它是令人質疑與感到困難的。從心理學的觀點, 問題是一種狀況下 (situation), 在此狀態下, 一個人想要達成某一目標, 但沒有明顯的路徑可以直接通往此目標, 問題就因此而產生 (Lester, 1978), 而數學問題即尋找答案的過程中, 一定要用到數學概念, 數學的原理及方法 (林碧珍, 1989)。一個數學問題所包含的成分是數學內容、表徵方式 (用數字、算式...)、情境和問句 (梁淑坤, 1996b)。從數學問題的定義上來分析, 它的基本要素就是要涉及到數學內涵, 所以當學生要形成一個合適的數學問題時, 首先必需對該問題涉及的數學知識有充分的瞭解, 始有可能形成此題目的題幹; 更而, 形成數學問題的過程比解決問題更需要富創造性的想像力, 也難怪, 科學家 Eienstein 和 Infeld 宣稱形成問題的重要性不亞於解決問題的重要性 (引自許育彰, 2000)。

### 三、培養學生形成數學問題的重要性

前面一節是從解題的觀點及數學課程改革的趨勢探討形成數學問題的重要性, 本節將從學生的學習及教師教學的觀點來說明形成數學問題的重要性。

林碧珍 (2001): 教師如何培養學生形成數學問題的能力。《國教世紀》, 第 198 期, pp. 5-14. 國立新竹師範學院。

(一) 形成的數學題目可以呈現出學生不同的認知發展階段

從學習的觀點, 學生依據教師所提供的素材而形成的數學題目, 可以呈現出學生不同的認知發展階段。從學生的解題過程中分析學生使用的解題策略, 不再是專屬於瞭解孩子認知發展階段的專利品, 從形成數學問題的過程中, 也是瞭解孩子認知發展的另一個途徑。例如: 對於二年級乘法的教學, 筆者在本師院輔導區從小學教師所得到的反應是: 「倍」與「幾個幾」的語言, 對於二年級學生很難瞭解。這個難題, 依據我們的經驗, 教師可以在教學後讓學生用「幾個幾」或「倍」的語言, 做為形成數學題目的素材, 以確認學生是否真正瞭解「幾個幾」的意義。下面例子是二年級玲玲老師的學生, 被要求完成下面的問題:

- (1) 請您用文字和畫圖, 出一個「5 個 6」的數學題目。  
(2) 請您再用文字和圖畫, 想一個「6 個 5」的數學題目。

下面是四位學生所設計的四種類型的題目:

(1) 小旭出的題目:

『5 個 6』: 一隻螞蟻有 6 隻腳, 5 隻螞蟻有幾隻腳?



『6 個 5』: 一朵花有 5 個花瓣, 6 朵花有幾個花瓣?



(2) 小樵出的題目:

『5 個 6』: 一朵梅花有 5 個花瓣, 6 朵梅花有幾個花瓣?



『6 個 5』: 一隻獨角仙有 6 隻腳, 5 隻獨角仙有幾隻腳?



(3) 小偉出的題目:

『5 個 6』: 一顆樹有六顆蘋果, 五顆樹有幾顆蘋果?



『6 個 5』: 一盤有 5 個餅乾, 6 盤有幾塊?



(4) 小君出的題目:

『5 個 6』: 今天雞生了 5 顆蛋, 昨天生了 6 顆蛋, 請問雞一共生了幾顆蛋?

林碧珍 (2001): 教師如何培養學生形成數學問題的能力。《國教世紀》, 第 198 期, pp. 5-14. 國立新竹師範學院。

『6 個 5』: 樹上有 6 隻鳥, 飛走了 5 隻, 還剩下幾隻鳥?

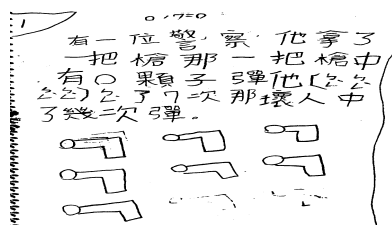
從四位學生所形成的四個題目中, 可以很明顯的區分, 小君完全缺乏對於乘法意義的瞭解, 而且小旭最能掌握「幾個幾」的意義, 小君可能只在乎所出現的數字「5」和「6」, 以小君設計的題目來看, 或許我們可以預測, 她沒有能力解決有關「幾個幾」的數學問題, 也沒有能力解決一般的數學應用問題。從小樵所設計的題目, 可以顯現出, 他對「幾個幾」意義的瞭解比小君清楚些, 因為小樵比小君多掌握了「單位量」和「單位數」是寫成以「幾個幾」為題目素材的重要概念, 只是小樵尚沒有能力區分「5 個 6」中的「5」是單位量所描述的量詞或是單位數所描述的數詞? 而以先在前面看到的數字「5」, 把它先出現在題目上。以小偉出的題目分析, 他對乘法意義的瞭解, 比小樵更能區分單位量與單位數, 小偉知道「5 個 6」中的「5」是代表單位數, 而「6」是代表單位量簡化後的意義, 但是他在圖形表徵方式上有些微的錯誤, 是否為粗心造成, 則有待教師更進一步的檢驗及確認。從小旭的題目中, 可以分析出他已能清楚的掌握乘法的意義, 能區分出「5 個 6」和「6 個 5」的不同。從四位學生所設計的題目中, 幫助玲玲老師瞭解學生有關「5 個 6」的學習困難是難以區分「5 個 6」是「5 有 6 個」還是「6 有 5 個」, 另外以小君的案例而言, 她還沒有能力區分出「5 個 6」和「5+6」的「5」和「6」分別代表不同的意義, 雖然兩者都有數字「5」和「6」。

(二) 從形成的數學題目, 可以看到學生的迷思概念或不完整的概念

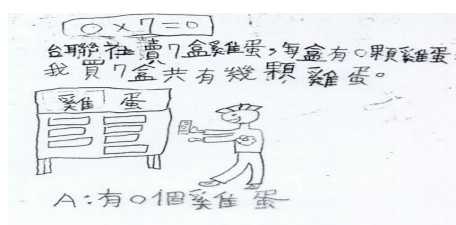
從學生設計的數學題目, 除了可以比較出學生在認知發展上的不同之外, 還可以知道孩子對於數學概念的瞭解, 例如: 當需要三年級學生澄清被乘數是 1 的乘法問題時, 又又老師要求學生:「請您出一個可以表示成  $1 \times 5 = ( )$  的數學題目」。下面是三年級學生常犯的一種不完整題型, 例如: 小琪的題目是:「有一個村落, 每一家有冰箱, 5 家共有幾個冰箱?」, 小佑出的題目是:「頂埔國小每一間教室有時鐘, 5 間教室共有幾個時鐘?」。從小琪和小佑設計的題目, 可以看出, 他們共同的問題是沒有去釐清「 $1 \times 5$ 」中的「1」是代表單位量的量詞, 依據他們所設計的題目, 所呈現的「每一家有冰箱」、「每一間教室有時鐘」, 並沒有詳細指明單位量是多少。從數學的意義上, 乘法問題中的被乘數是「1」與數數中的「1」所代表的意義是完全不同, 乘法中的被乘數是「1」是代表單位量為 1, 而數數中的「1」只是單純的物件的個數是「1」。



林碧珍 (2001): 教師如何培養學生形成數學問題的能力。《國教世紀》, 第 198 期, pp. 5-14. 國立新竹師範學院。



小揚



小民

從小民所設計的題目, 雖然符合題目的要求, 但卻不合常理, 因為在日常生活中, 任何一個消費者不太可能去買沒有裝蛋的蛋盒回家, 所以缺乏情境的合理性。從小奇出的題目可以看出他尚未掌握乘法的意義, 無法將乘法概念的前置概念「累加」轉換為乘法概念。而小婉、小揚所形成的題目, 或許可以成為教師下一次在進行被乘數是 0 的教學佈題用。

同樣的, 敏敏老師也出了一個題目, 希望能幫助孩子釐清乘數是 0 的意義及其特性:

請您用  $6 \times 0 = ( )$  出一個數學題目。

下面是學生所形成的數學題目:

小晴: 一包糖果 6 顆, 小明一包都沒吃, 請問小明吃了幾顆糖果?

小雅: 一支筆賣 6 元, 沒有人來買, 請問老闆得幾元?

小宜: 媽媽每天給小華 6 元, 可是只給小華 0 次, 請問小華得到幾元?

小霞: 一棵果樹可以生產 6 個波羅蜜, 果農的果園都沒有種波羅蜜樹, 請問果農的果園一共生產了多少顆波羅蜜?

教師都可以依據上面四位學生所設計的題目, 繼續延伸來說明, 以協助學生察覺到乘數為 0 的乘法其乘積為 0。以小晴的例子而言, 一包糖果不管是裝多少顆 (6 或 7 或 100 或 200), 「小明一包都沒吃」, 這是一個關鍵性的句子, 並不影響問句中的答案, 仍然依舊是「小明一共吃了 0 顆的糖果」。同樣的, 以小雅的例子, 「1 支筆賣 6 元, 沒有人來買, 老闆得多少元?」不管一支筆定價多少元, 只要沒有顧客上門, 老闆總是得 0 元。有關「乘數是 0 的乘法問題」, 可以從給學生形成數學問題的過程中, 幫助學生或教師很容易去察覺到 0 所扮演的威力, 亦即不管單位量是多少, 只是單位數是 0, 其乘積後的結果一定是 0。

#### (四) 學生所形成的數學題目, 可以作為教師的教學佈題

假若學生所形成的數學題目, 是屬於不完整、不合適、或不合理的, 都可以進一步在課堂中與全班學生共同進行題目的修補, 從修補過程中可以幫助學生進一步釐清所涉及的數學概念; 若是合適的題目, 教師可以用學生設計的這些題

林碧珍 (2001): 教師如何培養學生形成數學問題的能力。《國教世紀》, 第 198 期, pp. 5-14. 國立新竹師範學院。

目, 作為下一節課的教學佈題 (林碧珍, 2001)。

一般教師在教學時, 多半佈題是取自於課本或教學指引上的題目, 學生所形成的數學題目, 是作為教師教學佈題的另一個來源。在我們的數學成長團體, 教師都能體驗到利用學生所形成的數學題目是一種很有創意的教學技巧, 一方面用學生所設計的題目作為課堂中的佈題時, 被教師拿來作為教學佈題的該位學生在上課時始終保持著很專注的學習狀態, 對其他學生也有鼓勵的作用, 而且學生解同學出的題目比解老師出的題目, 在解題的動機上比較強, 學生在這節課的學習也特別的認真 (林碧珍, 2001)。例如: 下面是節錄自觀察菁菁老師的乘法教學的一小段對話:

菁菁老師: 你們的題目都很有趣喔! 現在老師手上拿的, 都是你們數學日記的題目哦! 這個是勳勳的題目, 很好玩, 他不但出題目還記得畫圖, 跟老師說一下, 聽聽他這個題目很好玩, 來看勳勳的, 一隻豬有 2 個鼻孔……

學生: 兩個鼻孔。

菁菁老師: 你怎麼知道?

學生: 勳勳有跟我們說過。

菁菁老師: 一隻豬有幾個鼻孔?

學生: 2 個鼻孔。

菁菁老師: 2 個鼻孔喔! 勳勳說那跑來了 5 隻豬, 5 隻哦! 那一共有多少個鼻孔? 小朋友, 老師先請您用算式記錄下來。

(學生拿小白板)

菁菁老師版書:	5 隻豬共有幾個鼻孔? ( ) 的 ( ) 倍
---------	----------------------------

從觀察中, 我們發現勳勳很專注於其他同學是否有能力解決自己出的題目, 他一直保持著很專注的眼神在進行這節課的學習。

#### 四、教師如何培養學生形成數學問題的能力

在前面一節已從學生的學習及教師的教學觀點闡述了提供給學生形成問題的機的重要性。既然教師認知到它的優點, 究竟教師應當如何協助學生來培養他們形成數學問題的能力, 此處的「如何」包含了「時機」及「策略」兩個層面。以「時機性」而言, 教師何時可以讓學生進行形成問題的活動? 依據從事有關學生擬題的教育研究, 一般是挪用少數的幾堂課的數學教學時間 (陶惠昭, 1998; 楊惠如, 2000; 劉芳妃, 1998)。然而, 當研究要落實到教學實務中, 卻受到有限的教學時間的限制, 所以學生的擬題活動佔用了原本不很充裕的數學教學時間, 迫於現實因素的考量, 教師很難落實到教學中, 所以在推廣性受到限制 (楊

林碧珍 (2001): 教師如何培養學生形成數學問題的能力。《國教世紀》, 第 198 期, pp. 5-14. 國立新竹師範學院。

惠如, 2000)。在林碧珍、施又齡、陳姿靜 (2000) 的研究發現, 在課堂教學後提供給學生使用的數學日記, 它是一種類似家庭作業的形式, 是一個可以建議用來提供給學生形成數學問題的時機。

以「策略」而言, 教師可以用來培養學生形成數學問題的策略應當是將焦點放在去發展可以用來作為形成數學問題的素材, 依據筆者過去兩年與一群中低年級教師所組成的數學成長團體, 以協同行動研究的方式, 共同研發而歸納出至少有十二種可以作為教師提供給學生形成問題的素材。這十二種類型的素材其主要原則是配合著數學教學的目標而設計的 (林碧珍, 2001)


(1) 圖形表徵 - 諸如: 利用  出一個數學題目。

(2) 數學語言 - 諸如: 請利用「5 個 6」或「6 個 5」或「幾個幾」或「平分」出一個數學題目或說一個故事。

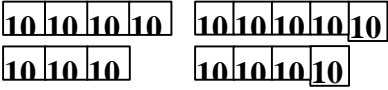
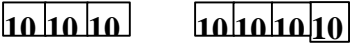
(3) 數學符號 - 諸如: 請用  $\frac{2}{5}$  或  $\frac{1}{10}$  說一個數學故事。

(4) 算式填充題 - 諸如: 請出一個數學題目可以表示成  $16 + ( ) = 29$

(5) 圖片情境 - 諸如: 請依據此圖片出一個數學問題

(6) 圖片表徵及數學語言 - 諸如: 請利用  出一個「幾個幾」的數學題目。

(7) 圖片情境及數學語言 - 諸如: 從這張森林的圖片中出一個「幾個幾」的數學題目嗎?  
或用圖中的 10 元, 出一個有關幾個 10 元的數學題目。

(8) U 利用學生的解題表徵 - 諸如: 小新的做法   
老師出了什麼題目?   
 $7 + 9 = (16)$   
答: 16 張

U 利用一位或二位學生的解題方法 - 諸如: 你能從家豪和辰晏的作法猜猜老師出的題目是什麼?

家豪: $30 + 40 = 70$	辰晏: $35 + 40 = 75$
$5 + 9 = 14$	$75 + 5 = 80$
$70 + 14 = 84$	$80 + 4 = 84$

(9) 根據上課內容或上課的教學活動 - 諸如: 請您模仿老師的方法, 自己講一個有關壓歲錢不超過 5000 元的故事。

(10) 單元題材的內容 - 諸如: 請出一個有關容量、或重量、或「乘法」、或「分分看」、或「幾個幾分」、或「分數」、或「二位數加法」的數學題目或故事。



林碧珍 (2001): 教師如何培養學生形成數學問題的能力。 國教世紀, 第 198 期, pp. 5-14. 國立新竹師範學院。

(11) 設計一項活動 - 諸如: 請設計一個有關統計圖表的活動與家人一起玩。

(12) 解題再出題 - 諸如: 給定一題目, 要學生解出題目來, 然後再擬出另一個題目來。

例: 請先算出算式填充題  $8 \times ( ) = 40$ , 再出題目。

## 五、結語

形成數學問題能力的培養是九年一貫課程數學學習領域的課程目標之一, 其重要性並不亞於解決問題能力的培養。依學習的觀點, 從學生形成數學問題的過程, 需要更進一步釐清將鑲嵌在題目中的數學概念及題目的表徵或置於某一個情境脈絡中, 因此在形成數學題目的過程, 有助於學生認知能力的提昇, 它也可以反映出學生不同的認知發展階段; 另外, 用來反應孩子的認知發展的階段, 不只是透過學生解題後的解題類型分析, 透過學生形成問題, 也是另一道途徑。透過學生所形成的數學題目, 也可以幫助教師看到孩子的學習困難在哪裡? 對於某一些特殊的數學概念, 透過形成的數學問題, 很容易幫助學生洞察到這個數學概念的本質, 例如: 乘數是 0 的乘法問題, 透過給學生形成數學題目, 從所設計的題目中, 很容易察覺到「任何數  $\times 0 = 0$ 」的事實。最後, 若教師提供給學生形成數學問題的素材是配合著教學目標, 則學生所形成的數學題目, 可以立即性的作為下一節課教師的教學佈題使用。

至於, 教師如何培養學生形成數學問題的能力, 以時機性而言, 可以將其融入學生回家作業的內容, 既不佔用正常的教學時數, 又可以提昇孩子形成數學問題的能力。以「策略」而言, 除了文章內所提供的十二種素材之外, 教師應當將思考的重點放在去發展更多的素材, 可以作為形成數學問題的素材, 最好的策略是與同事或志同道合的朋友共同分享, 共同設計討論。

在本文所強調的學生進行形成問題的活動, 是在於培養學童「察覺」日常生活中與數學相關的事物, 及將其「轉化」為數學問題, 因為學童所能設計想出的問題是與他們周遭生活相關事件有感覺得到的, 是真實性的, 比較不可能設計出不合情境的數學題目。

## 六、參考文獻

李嘉珍 (2000): 協同數學成長團體下之教師佈題 - 以三位二年級教師為例。國

林碧珍 (2001): 教師如何培養學生形成數學問題的能力。 國教世紀, 第 198 期, pp. 5-14. 國立新竹師範學院。

立新竹師範學院國民教育研究所碩士論文 (未出版)。

林文生 (1996): 一位國小數學教師佈題情境及其對學生解題交互影響之分析研究。國立台北師範學院國民教育研究所博士論文 (未出版)。

林碧珍 (1989): 國小學生『怎樣解題』表現及其相關因素之研究。碩士論文。國立新竹師範學院。

林碧珍 (2001): 發展國小教師之學生認知知識 - 理論結合實務研究取向的教師專業發展。台北: 師大書苑印行。

林碧珍、施又齡、陳姿靜 (2000): 透明化教師實施學生歷程檔案評量的行動研究。 八十九學年度師範院校教育學術論文集 (pp.463-489) 國立新竹師範學院。

教育部 (1993): 國民小學課程標準。台北市: 台捷。

教育部 (2000): 國民中小學九年一貫課程暫行綱要。教育部。

梁淑坤 (1994): 擬題的研究及其在課程的角色。周筱亭主編: 國民小學數學科新課程概說 - 低年級 (pp.152-167)。台灣省國民學校教師研習會。

梁淑坤 (1996a): 師範學生擬題行為之研究。 國科會八十五年科學教育專題研究計畫成果討論會論文摘要, 計畫編號 NSC83-0111-S-023-007A。

梁淑坤 (1996b): 從佈題探討數學教科書的評鑑。 教師之友, 37 (4), 23-28。

許育彰 (2000): 探討高中生從不同力學情境中發現問題的研究。 明倫學報, 第四期, 台北市立明倫高級中學。

陶惠昭 (1998): 從一年級教室看數學教師的佈題。國立嘉義師範學院國民教育研究所碩士論文 (未出版)。

楊惠如 (2000): 擬題活動融入國小三年級數學科教學之行動研究。國立嘉義大學國民教育研究所碩士論文 (未出版)。

劉芳妃 (1998): 合作擬題活動融入國一數學科教學之個案研究。國立高雄師範大學數學系碩士論文(未出版)。

English, L. D. (1997a). Promoting a problem-posing classroom. *Teaching Children Mathematics*, 4(3), 172-179.

English, L.D. (1997b). Problem posing in the elementary mathematics curriculum. 八十六學年度國小課程研究學術研討會, 台灣省國民學校教師研習會。

Leung, S. K. (1997). On the open nature in Mathematical problem posing. *Use of Open-ended Problems in Mathematics Classroom* (pp.26-33). University of Helsinki. Department of education. Research Report ,176.

林碧珍 (2001): 教師如何培養學生形成數學問題的能力。 國教世紀, 第 198 期, pp. 5-14. 國立新竹師範學院。

Leung, S. K. & Silver, E.A. (1997). The role of task format, mathematics knowledge, and creative thinking on the arithmetic problem posing of prospective elementary school teachers. *Mathematics Education Research Journal*, 9(1), 5-24. Australia.

Lester, F. K. (1978). Mathematical problem solving in the elementary school: Some educational and psychological considerations. In, L. L. Harfield & D. A. Bradbard (Eds.) *Mathematical problem Solving: Paper from a Research Workshop*. Columbus, OH: ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education.

National Council of Teachers of Mathematics (1989). *Curriculum and evaluation standard for school mathematics*. Reston, Va: The Council.

National Council of Teachers of Mathematics (1991). *Professional Standards for Teaching Mathematics*. Reston, Va: The Council.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*, Reston, Va: The Council.

Sliver, E. & Cai, J. (1996). An analysis of arithmetic problem posing middle school students, *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(5), 521-539.

Webster's (1979). *News Universal unabridged dictionary* (2<sup>nd</sup> .). New York, NY: Simon & Schuster.